수리 영역('가'형)

◈정답

1. ④	2. ①	3. ①	4. ④	5. ②
6. ③	7. ①	8. ①	9. ②	10. ④
11. ⑤	12. ③	13. ②	14. ③	15. ⑤
16. ①	17. ⑤	18. 28	19. 17	20. 12
21. 27	22. 30	23. 11	24. 25	25. 15

<선택-미분과 적분>

26. ⑤	27. ②	28. ③	29. ④	30. 17

<선택-확률과 통계>

26. ④	27. ②	28. ⑤	29. ③	30. 288

<선택-이산수학>

26. ③	27. ⑤	28. ④	29. ②	30. 49

◈해설

1. $9^{\frac{3}{2}} \times 27^{-\frac{2}{3}}$

$= (3^2)^{\frac{3}{2}} \times (3^3)^{-\frac{2}{3}} = 3^3 \times 3^{-2} = 3^{3-2} = 3^1 = 3$

2. $(A+B) \cdot A = \left\{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

따라서, 모든 성분의 합은 $1+0+5+3=9$

3. $\int_0^1 (6x^2+2ax)dx = 6+2a$

$[2x^3+ax^2]_0^1 = 6+2a$

$2+a = 6+2a$

$\therefore\ a = -4$

4. $\sqrt{x^2-2x} = t(\geq 0)$라 하면

주어진 식은

$\sqrt{t^2+1} - t = \frac{1}{2}$

$\sqrt{t^2+1} = t + \frac{1}{2}$

$2\sqrt{t^2+1} = 2t+1$에서 양변을 제곱하여 정리하면

$4t^2+4 = 4t^2+4t+1$

$4t = 3,\ t = \frac{3}{4}$

$\sqrt{x^2-2x} = \frac{3}{4}$

$4\sqrt{x^2-2x} = 3$

$16x^2-32x-9=0$

따라서, 두 근의 합은 2

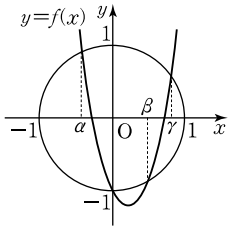
5. 방정식의 양변에 분모의 최소공배수를 곱하면

$x^2(f(x)-1-f(x)-1) = 2(f(x)+1)(f(x)-1)$

$(f(x) \neq \pm 1,\ x \neq 0)$

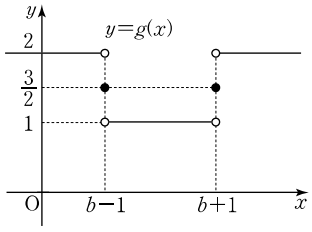
$-x^2 = (f(x))^2 - 1$

$x^2 + (f(x))^2 = 1$ ……㉠



원 $x^2+y^2=1$과 이차함수 $y=f(x)$와의 교점은 모두 ㉠을 만족시키나 (0, -1)은 무연근이다. 따라서 3개

6. $g(x) = \begin{cases} 2 & (x > b+1 \text{ 또는 } x < b-1) \\ \frac{3}{2} & (x = b+1 \text{ 또는 } x = b-1) \\ 1 & (b-1 < x < b+1) \end{cases}$



$h(b+1) = f(b+1) \cdot g(b+1) = \frac{3}{2} \cdot f(b+1)$

$\lim_{x \to b+1+0} h(x) = \lim_{x \to b+1+0} f(x) \cdot g(x) = 2 \cdot f(b+1)$

$\lim_{x \to b+1-0} h(x) = \lim_{x \to b+1-0} f(x) \cdot g(x) = 1 \cdot f(b+1)$

$\therefore\ \frac{3}{2} f(b+1) = 2 \cdot f(b+1) = 1 \cdot f(b+1)$

$\therefore\ f(b+1)=0$

$\therefore\ (b+1)^2-4(b+1)+a=0$ ……㉠

$h(b-1)=f(b-1)\cdot g(b-1)=\dfrac{3}{2}\cdot f(b-1)$

$\lim\limits_{x\to b-1+0}=\lim\limits_{x\to b-1+0}f(x)\cdot g(x)=1\cdot f(b-1)$

$\lim\limits_{x\to b-1-0}=\lim\limits_{x\to b-1-0}f(x)\cdot g(x)=2\cdot f(b-1)$

$\therefore\ \dfrac{3}{2}f(b-1)=1\cdot f(b-1)=2\cdot f(b-1)$

$\therefore\ f(b-1)=0$

$\therefore\ (b-1)^2-4(b-1)+a=0$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $a=3,\ b=2$

$\therefore\ a+b=5$

7. $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 $x=2$에 대하여 대칭이므로 $f(x)=g(4-x)$

$\Rightarrow a^{bx-1}=a^{1-b(4-x)}$

$\Rightarrow a^{bx-1}=a^{1-4b+bx}$

$\Rightarrow a^{-1}=a^{1-4b}$ ……㉠

$f(4)+g(4)=\dfrac{5}{2}$이므로

$a^{4b-1}+a^{1-4b}=\dfrac{5}{4}$ ……㉡

㉠과 ㉡에서

$a+\dfrac{1}{a}=\dfrac{5}{2}\ \ (0<a<1)$

$\therefore\ a=\dfrac{1}{2}$ ……㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$b=\dfrac{1}{2}$

따라서 $a+b=1$

8. 핸드볼 공의 무게를 X라 하면

$X\sim \mathrm{N}(350,\ 16^2)$

크기 64인 표본의 평균을 $\overline{X}$라 하면

$\mathrm{E}(\overline{X})=350$

$\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{16^2}{64}=2^2$

$\therefore\ \overline{X}\sim \mathrm{N}(350,\ 2^2)$

$\therefore\ \mathrm{P}(\overline{X}\geqq 355)+\mathrm{P}(\overline{X}\leqq 346)$

$=\mathrm{P}\left(Z\geqq\dfrac{355-350}{2}\right)+\mathrm{P}\left(Z\leqq\dfrac{346-350}{2}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\geqq 2.5)+\mathrm{P}(Z\leqq -2)$

$=0.0062+0.0228=0.0290$

9. ㄱ. $g(3)=\{f(3)\}^2=1$

$\lim\limits_{x\to 3+0}g(x)=\lim\limits_{x\to 3+0}f(f(x))=2$

불연속

ㄴ. $\lim\limits_{x\to 3-0}g(x)=\lim\limits_{x\to 3-0}\{f(x)\}^2=4$

$\lim\limits_{x\to 3+0}g(x)=\lim\limits_{x\to 3+0}f(f(x))=4$

$g(3)=\{f(3)\}^2=4$

$x=3$에서 연속

$\lim\limits_{x\to 4-0}g(x)=\lim\limits_{x\to 4-0}f(f(x))=3$

$\lim\limits_{x\to 4+0}g(x)=\lim\limits_{x\to 4+0}f(f(x))=3$

$g(4)=f(f(4))=3$

$x=4$에서 연속

ㄷ. $\lim\limits_{x\to 4-0}g(x)=\lim\limits_{x\to 4-0}f(f(x))=2$

$\lim\limits_{x\to 4+0}g(x)=\lim\limits_{x\to 4+0}f(f(x))=3$

불연속

10. $a_{m+1}=\dfrac{m^2}{(m+1)(m+2)}\cdot a_m$ ……㉮

이므로

$a_{m+1}=\dfrac{m^2}{(m+1)(m+2)}\cdot a_m$

$=\dfrac{m^2}{(m+1)(m+2)}\cdot\dfrac{(m-1)^2}{(m)(m+1)}\cdot a_{m-1}$

$=\dfrac{m^2}{(m+1)(m+2)}\cdot\dfrac{(m-1)^2}{m(m+1)}\cdot\dfrac{(m-2)^2}{(m-1)(m)}\cdot a_{m-2}$

…

$=\dfrac{m^2}{(m+1)(m+2)}\cdot\dfrac{(m-1)^2}{m(m+1)}\cdot\dfrac{(m-2)^2}{(m-1)(m)}$

$\cdots\cdots\ \dfrac{2^2}{3\cdot 4}\cdot\dfrac{1^2}{2\cdot 3}\cdot a_1$

$=\dfrac{2\cdot 1^2}{(m+1)^2(m+2)}\cdot a_1$

$=\dfrac{1}{(m+1)^2(m+2)}$ ……㉯

$=\dfrac{1}{(m+1)^2}-\dfrac{1}{(m+1)(m+2)}$ ……㉰

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^m}=1$이므로

$f(x)=x^m+\cdots$

$f'(x)=mx^{m-1}+\cdots$

$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{x^{m-1}}=m=a$

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=b$이므로, $f(x)=x^n\cdot g(x)$

$\therefore\ m\geqq n \quad \therefore$ ㄱ은 참

$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x^{n-1}}=\lim_{x\to 0}(n\cdot g(x)+x\cdot g'(x))$

$=n\cdot g(0)=9$

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{x^n\cdot g(x)}{x^n}=g(0)=\frac{9}{n}=b$ ……㉠

$\therefore\ a\cdot b=m\cdot\frac{9}{n}=\frac{9m}{n}\geqq 9(\because$ ㄱ$)$

$f(x)$가 삼차함수이면

$a=m=3$이므로 $a\cdot m=9$

㉠에서 $b\cdot n=9$이므로 ㄷ도 참

12. ㄱ. $A=\begin{pmatrix}4 & 9\\ 3 & 2\end{pmatrix}$에서

$\log_4 2=\log_9 3$이므로

$A\in S$ ……(참)

ㄴ. $A\in U$이고 $A\notin S$라면

$\log_a d=m,\ \log_b c=n\ (m\neq n)$인 $m,\ n$이 존재한다.

위에서 $d=a^m,\ c=b^n$이므로

$ad-bc=a^{m+1}-b^{n+1}=0\quad(\because\ a\neq b,\ bc\neq 1)$

인 예를 구하면 반례이다. 반례로 $m=5,\ n=2,\ a=2,\ b=4$를 들 수 있다.

ㄷ. $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$에서 $\log_a d=\log_b c=k$라 하면

$d=a^k,\ c=b^k$이므로

$ad-bc=a^{k+1}-b^{k+1}\neq 0\ (a\neq b,\ bc\neq 1)$

……(참)

13. x_{2n}은 $(x_{2n-1},\ {x_{2n-1}}^2)$을 지나고 기울기 -1인 직선과 $y=x^2$과의 교점이므로

$x^2=-(x-x_{2n-1})+{x_{2n-1}}^2$

$x^2+x-x_{2n-1}(1+x_{2n-1})=0$

$\therefore\ x_{2n-1}+x_{2n}=-1$

$\therefore\ x_{2n-1}=-1-x_{2n}$

또 x_{2n+1}은 $(x_{2n},\ {x_{2n}}^2)$ 지나고 기울기 1인 직선과 $y=x^2$의 교점이므로

$x^2=(x-x_{2n})+{x_{2n}}^2$

$x^2-x+x_{2n}(1-x_{2n})=0$

$\therefore\ x_{2n+1}+x_{2n}=1$

$x_{2n+1}=1-x_{2n}$

$\therefore\ x_0=0$

$x_1=1$

$x_2=-2$

$x_3=3$

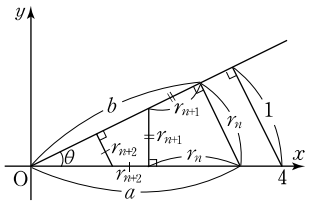
$x_4=-4$

$l_n=\sqrt{2}(|x_{n-1}|+|x_n|)$

$=\sqrt{2}(n-1+n)=\sqrt{2}(2n-1)$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}(2n-1)}{n}=2\sqrt{2}$

14.



$\sin\theta=\frac{1}{4}$이므로 $b:a=\sqrt{15}:4$

$\therefore\ b-r_{n+1}:r_{n+1}=4:1$

$a:r_n=4:1$

$4r_{n+1}=b-r_{n+1}$

$b=5r_{n+1}$

$a=4r_n$

$\therefore\ 5r_{n+1}:4r_n=\sqrt{15}:4$

$r_{n+1}=\frac{4\sqrt{15}}{20}r_n$

$r_{n+1}=\frac{\sqrt{15}}{5}r_n$

$\therefore\ S_n$의 공비는 $\frac{15}{25}=\frac{3}{5}$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\pi}{1-\frac{3}{5}}=\frac{5}{2}\pi$

15. 5일간 총 봉사시간이 8시간이 되는 경우는 아래와 같다.

i) (4, 1, 1, 1, 1)

ii) (3, 2, 1, 1, 1)

iii) (2, 2, 2, 1, 1)이고

따라서, 구하는 경우의 수는 $\frac{5!}{4!}+\frac{5!}{3!}+\frac{5!}{3!2!}=35$

16. 첫 번째 숫자가 같을 확률은
(철수, 영희) : (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)
5가지이므로

$5\times\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{1}{5}$

따라서, 첫 번째 숫자가 다를 확률은

$1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$

첫 번째 숫자가 다를 경우 남은 4개의 숫자에서 같은 수는 3개 뿐이므로 두 번째 숫자가 같을 확률은

$3\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$

따라서, 구하는 확률은 $\frac{4}{5}\times\frac{3}{16}=\frac{3}{20}$

17. $I(E)=\log_{\frac{1}{2}}P(E)$이므로

ㄱ. $P(E)=\frac{1}{2}$이므로 $I(E)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}=1$ (참)

ㄴ. 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$I(A\cap B)=\log_{\frac{1}{2}}\mathrm{P}(A\cap B)=\log_{\frac{1}{2}}\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$=\log_{\frac{1}{2}}\mathrm{P}(A)+\log_{\frac{1}{2}}\mathrm{P}(B)=I(A)+I(B)$ (참)

ㄷ. $\mathrm{P}(A)\leqq\mathrm{P}(A\cup B)$이고 $\mathrm{P}(B)\leqq\mathrm{P}(A\cup B)$이므로

$I(A)\geqq I(A\cup B)$, $I(B)\geqq I(A\cup B)$

$\therefore\ I(A)+I(B)\geqq 2I(A\cup B)$ (참)

18. $f(3)=8$이므로 $f(x)=(x-3)g(x)+8$이라 하자.

$f(x+1)=(x-1)g(x+1)+8$

$\lim_{x\to2}\frac{f(x+1)-8}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)g(x+1)}{(x-2)(x+2)}$

$=\lim_{x\to2}\frac{g(x+1)}{x+2}=\frac{g(3)}{4}=5$

$\therefore\ g(3)=20$

$f'(x)=g(x)+(x-3)g'(x)$

$f'(3)=g(3)=20$

$\therefore\ f(3)+f'(3)=8+20=28$

19. 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 기울기가 $\frac{1}{2}$인 접선의 방정식은

$y=\frac{1}{2}x\pm\sqrt{\frac{1}{4}a^2+b^2}\ \Leftrightarrow\ y=\frac{1}{2}x\pm1$

$\therefore\ \frac{1}{4}a^2+b^2=1$ ……㉠

또, 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 초점이 $(\pm b,\ 0)$이므로

$b^2=a^2-b^2$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $a^2=\frac{4}{3}$, $b^2=\frac{2}{3}$

$\therefore\ a^2b^2=\frac{8}{9}$

$\therefore\ p+q=17$

20. $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$를 x축의 음의 방향

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$를 y축의 양의 방향

$\overrightarrow{\mathrm{AE}}$를 z축의 음의 방향으로 잡으면

점 T의 좌표는 $(-1,\ 1,\ 0)$

점 P의 좌표는 $(0,\ 0,\ -2)$

$\overrightarrow{\mathrm{TP}}=(1,\ -1,\ -2)$

점 Q의 좌표는 (0, 2, 0)

점 S의 좌표는 (-2, 4, -8)

$\overrightarrow{\mathrm{QS}}=(-2,\ 2,\ -8)$

$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{TP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QS}}=-2-2+16=12$

21. $y^2=4px$에서 $p=3$이므로

기울기 1인 접선의 방정식은 $y=x+3$

$\therefore\ a=3$ ……㉠

$y=x+3$과 $y^2=12x$의 교점은 $x^2+6x+9=12x$에서 $x=3$

$\therefore\ b\pi=\pi\int_0^3(x+3)^2dx-\pi\int_0^3 12x\,dx$

$=\pi\int_0^3(x^2-6x+9)\,dx$

$=\pi\left[\frac{x^3}{3}-3x^2+9x\right]_0^3$

$=\pi(9-27+27)$

$=9\pi$

$\therefore\ b=9$ ……㉡

$\therefore$ ㉠, ㉡에서, $ab=27$

22. $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$라 하면 $x^2+y^2+z^2=9$

$\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(2,\ 2,\ 2)+\left(\frac{x}{3},\ \frac{y}{3},\ \frac{z}{3}\right)$

$=\left(\frac{x}{3}+2,\ \frac{y}{3}+2,\ \frac{z}{3}+2\right)$이므로

$\left|\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2=\left(\frac{x}{3}+2\right)^2+\left(\frac{y}{3}+2\right)^2+\left(\frac{z}{3}+2\right)^2$

$=\frac{1}{9}\{(x+6)^2+(y+6)^2+(z+6)^2\}$이고,

$(x+6)^2+(y+6)^2+(z+6)^2$은 점 P와 점 B(-6, -6, -6)까지의 거리의 제곱과 같다.
P가 구위의 점이므로

$\overline{BP}^2 \leqq (\overline{OP}+\overline{OB})^2 = (3+6\sqrt{3})^2$

$\therefore \left|\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OP}\right|^2 = \frac{1}{9}\overline{BP}^2 \leqq (1+2\sqrt{3})^2$

$\therefore a=1,\ b=2$

$\therefore 10(a+b)=30$

<다른 풀이>

$\left|\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OP}\right|^2$

$= \frac{4}{9}|\overrightarrow{OA}|^2+\frac{1}{9}|\overrightarrow{OP}|^2+\frac{4}{9}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}$

$= 13+\frac{4}{9}\cdot 3\sqrt{3}\cdot 3\cdot\cos\theta$

(θ는 $\overrightarrow{OA}$와 $\overrightarrow{OP}$가 이루는 각)이므로 $\cos\theta=1$일 때 $\left|\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OP}\right|^2$은 최대값 $13+4\sqrt{3}$을 가진다.

$\therefore \left|\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OP}\right|^2 \leqq \sqrt{13+2\sqrt{2}} = \sqrt{12}+\sqrt{1}$

$= 1+2\sqrt{3}$

$\therefore a=1,\ b=2$

$\therefore 10(a+b)=30$

23. 자연수 p를 n으로 나누었을 때 몫을 q, 나머지를 q라 하자.

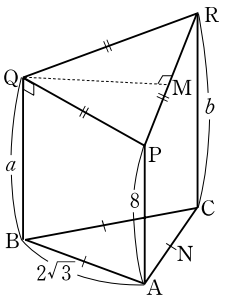
$p=q\cdot n+q\ (q=1,\ 2.\ 3,\ \cdots,\ n-1)$

$a_n = \sum_{k=1}^{n-1}(kn+k) = \frac{n(n-1)}{2}\cdot n+\frac{n(n-1)}{2}$

$= \frac{(n-1)n(n+1)}{2}$

따라서, $a_n > 500$을 만족하는 자연수 n의 최소값은 11이다.

24. 세 점 P, Q, R에서 α에 내린 수선의 발을 각각 A, B, C라 하면 △ABC는 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$인 정삼각형이다.



$\overline{AP}=8,\ \overline{BQ}=a,\ \overline{CR}=b$라 하면

$\overline{PQ}=\sqrt{12+(a-8)^2}$,

$\overline{QR}=\sqrt{12+(b-a)^2}$, $\overline{RP}=\sqrt{12+(b-8)^2}$이고

$(b-8)^2>(b-a)^2$, $(b-8)^2>(a-8)^2$이므로

$\overline{RP}>\overline{PQ}$, $\overline{RP}>\overline{QR}$

$\therefore \overline{PQ}=\overline{QR}$이고, $a-8=b-a$ ……㉠

$a=8+t$, $b=8+2t$라 하면 $(t>0)$

$\overline{PQ}=\overline{QR}=\sqrt{12+t^2}$,

$\overline{PR}=\sqrt{12+4t^2}=2\sqrt{t^2+3}$이므로

$\overline{PR}$의 중점을 M이라 하면 $\overline{QM}\perp\overline{PR}$이므로

$\overline{QM}=\sqrt{12+t^2-(t^2+3)}=3$

$\therefore \triangle PQR=3\sqrt{t^2+3}$

$\triangle PQR\times\cos 60^\circ = \triangle ABC$에서

$\frac{3}{2}\sqrt{t^2+3}=3\sqrt{3}$

$\therefore t=3$

따라서, $a=11$, $b=14$이고, $a+b=25$

<다른 풀이>

㉠까지는 위와 같음.

AC의 중점을 N이라 하면,

$\overline{MN}=\frac{1}{2}(\overline{AP}+\overline{CR})=\overline{BQ}$이고 $\overline{MN}\,/\!/\,\overline{AP}\,/\!/\,\overline{BQ}$

이므로 사각형 BQMN은 직사각형이다.

삼각형 PQR를 아래쪽으로 a만큼 평행이동시키면 $\overline{QM}=\overline{BN}$이 되고 이것이 교선이다.

$\overline{PR}\perp\overline{QM}$, $\overline{BN}\perp\overline{AC}$에서 이면각은 $\overline{PR}$과 $\overline{AC}$가 이루는 각과 같고,

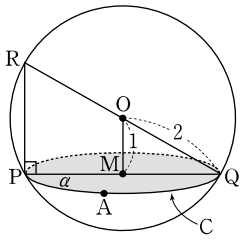
$\overline{PR}=2\sqrt{3}\times\frac{1}{\cos 60^\circ}=4\sqrt{3}$

$\therefore b-8=\sqrt{48-12}=6$

$\therefore b=14,\ a=11$

$\therefore a+b=25$

25. 구의 중심 O(0, 0, 0)에서 평면 $\alpha : y-\sqrt{3}z=2$까지의 거리는



$\frac{2}{\sqrt{1+3}}=1$

이고 C의 중심을 M라 하면

$\overline{OM}=1$,

P, Q가 원 C의 지름의 양 끝점이므로

P, Q의 중점이 C의 중심 M이다.

따라서 C의 반지름 $\overline{MQ}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$

$\overline{AP}=\overline{AQ}$이므로 $\overline{AQ}=\sqrt{6}$

구의 중심 O가 선분 $\overline{RQ}$ 위에 존재하므로

$\angle QAR=90^\circ$

$\overline{AQ}^2+\overline{AR}^2=\overline{RQ}^2$이므로

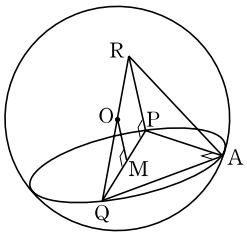
$\overline{AR} = \sqrt{4^2 - (\sqrt{6})^2} = \sqrt{10}$

$\therefore\ S = \frac{1}{2} \times \sqrt{10} \times \sqrt{6} = \sqrt{15}$

$\therefore\ S^2 = 15$

<다른 풀이>

원점과 평면 α와의 거리는 $\frac{2}{\sqrt{1+3}} = 1$이므로 구의 중심을 O, $\overline{PQ}$의 중점을 M이라 하면



$\overline{OM} = 1$, $\overline{QM} = \sqrt{3}$,

$\overline{RQ} = 2\overline{OQ} = 4$ ……㉠

또, $\angle PAQ = 90^\circ$이므로, 삼각형 PAQ는 직각이등변 삼각형이다.

$\therefore\ \overline{AQ} = \sqrt{6}$ ……㉡

또, $\overline{RP} \perp \alpha$에서 $\overline{RP} \perp \overline{AQ}$이고,

$\overline{AQ} \perp \overline{PA}$에서 $\overline{AQ} \perp$(평면 ARP)

$\therefore\ \angle QAR = 90^\circ$ ……㉢

따라서, ㉠, ㉡, ㉢에서 삼각형 ARQ는 $\overline{AQ} = \sqrt{6}$, $\overline{RQ} = 4$, $\angle A = 90^\circ$인 직각삼각형이다.

$\therefore\ S = \frac{1}{2} \times \sqrt{6} \times \sqrt{16-6} = \sqrt{15}$

$\therefore\ S^2 = 15$

<선택-미분과 적분>

26. $\sin 2x = 2\cos x - 2\cos^2 x$에서

$2\sin x \cos x = 2\cos x - 2\cos^2 x$

$\therefore\ \cos x(\sin x + \cos x - 1) = 0$

$\therefore\ \cos x = 0$ 또는 $\sin x + \cos x = 1$

(ⅰ) $\cos x = 0$에서 $x = \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$

(ⅱ) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$

$\therefore\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\frac{\pi}{4} \le x + \frac{\pi}{4} < \frac{9}{4}\pi$이므로

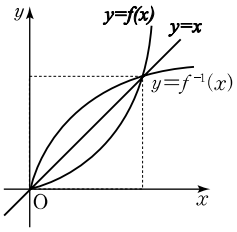
$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi$

$\therefore\ x = 0,\ \frac{\pi}{2}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 x의 값의 합은

$0 + \frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}\pi = 2\pi$

27. 구간 [0, 1]에서 $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$이므로



$y = f^{-1}(x)$와 $y = f(x)$로 구간 [0, 1]에서 둘러싸인 부분의 넓이는 직선 $y = x$와 곡선 $y = f(x)$로 둘러싸인 넓이의 두 배이다.

$$\therefore \int_0^1 \{f^{-1}(x) - f(x)\}dx$$

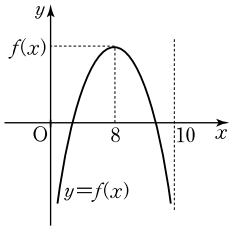
$$= 2\int_0^1 \{x - f(x)\}dx$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{n} - f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{n} - f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{2}{n}$$

28. $f'(x) = \frac{4}{x} + \frac{-1}{10-x}$

$= \frac{-5(x-8)}{x(10-x)}$



진수조건에서 $0 < x < 10$이므로

$f(x)$는 $x = 8$에서 극대이고 최대이다.

또 $\lim_{x\to+0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to10-0} f(x) = -\infty$

이므로 $y = f(x)$의 그래프는 아래와 같다.

ㄱ. 최댓값은 $f(8) = 13\ln 2$ (참)

ㄴ. 위의 그래프에서 방정식 $f(x) = 0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. (참)

ㄷ. $f(x) = \ln x^4(10-x)$이므로

$y = e^{f(x)} = x^4(10-x) = 10x^4 - x^5$

$y' = 40x^3 - 5x^4$, $y'' = 120x^2 - 20x^3$

$\therefore\ y'' = 20x^2(6-x)$

따라서 $0 < x < 6$에서 $y'' > 0$이므로 $y = e^{f(x)}$는 아래로 볼록하다. (거짓)

29. $f'(x) = 2 + \sin(x^2)$

$f''(x) = 2x\cos(x^2)$이므로

$f''(a) = 2a\cos(a^2) = \sqrt{3}a$에서

$\cos(a^2) = \frac{\sqrt{3}}{2}\ \left(0 < a^2 < \frac{\pi}{2}\right)$

$f(f^{-1}(x)) = x$이므로 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(f^{-1}(x))\{(f^{-1})'(x)\} = 1$

$x = 0$을 대입하면

$f'(f^{-1}(0))\{(f^{-1})'(0)\} = 1$

$\therefore\ (f^{-1})'(0) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(0))}$

또, $f(a)=0$이므로 $f^{-1}(0)=a$

$\therefore\ (f^{-1})'(0) = \dfrac{1}{f'(a)}$

$= \dfrac{1}{2+\sin(a^2)} = \dfrac{1}{2+\sin\frac{\pi}{6}}$

$= \dfrac{2}{5}$

30. 사인법칙에 의해

$\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\theta} = 2 \quad \therefore\ \overline{\mathrm{BC}} = 2\sin\theta$

선분 BC의 중점을 M, 내접원의 중심을 I라고 하면

$\angle\mathrm{ABC} = \dfrac{\pi-\theta}{2}, \quad \angle\mathrm{IBC} = \dfrac{\pi-\theta}{4}$이므로

$\overline{\mathrm{BM}} = \sin\theta$이고 $\tan\dfrac{\pi-\theta}{4} = \dfrac{r(\theta)}{\overline{\mathrm{BM}}}$이므로

$r(\theta) = \sin\theta\tan\dfrac{\pi-\theta}{4}$

$\therefore\ \lim\limits_{\theta\to\pi-0}\dfrac{\sin\theta\tan\frac{\pi-\theta}{4}}{(\pi-\theta)^2}$에서

$\pi-\theta=\alpha$로 놓으면

$\lim\limits_{\alpha\to+0}\dfrac{\sin(\pi-\alpha)\tan\frac{\alpha}{4}}{\alpha^2}$

$= \lim\limits_{\alpha\to+0}\dfrac{\sin\alpha\tan\frac{\alpha}{4}}{\alpha\cdot\frac{\alpha}{4}\cdot 4} = \dfrac{1}{4}$

$\therefore\ p=4,\ q=1 \quad \therefore\ p^2+q^2=17$

<선택-확률과 통계>

26. 최빈값은 24이므로

$\dfrac{9+17+19+21+24+24+26+30+31+33+n}{11}$

$=24$

$n = 24\cdot 11 - 234 = 30$

27.

	TTT HHH	THH HHT · TTH HTT	HTH THT	
확률변수 X	3	1	0	합
확률	$\frac{1}{8}\cdot 2$	$\frac{1}{8\cdot 4}$	$\frac{1}{8\cdot 2}$	1

$E(X) = 3\cdot\dfrac{2}{8} + \dfrac{4}{8} = \dfrac{10}{8} = \dfrac{5}{43}$

$E(X^2) = 9\cdot\dfrac{2}{8} + 1\cdot\dfrac{4}{8} = \dfrac{22}{8}$

$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \dfrac{22}{8} - \dfrac{25}{16} = \dfrac{19}{16}$

28. 큰수+작은 수 합에 따라 경우를 나누어 준다.

(1) (큰수+작은 수)=7
큰수 6, 작은수 1 : ${}_4C_2 = 6$가지 큰수 5, 작은수 2 : 1가지
(2) (큰수+작은 수)=8
큰수 7, 작은수 1 : ${}_5C_2 = 10$가지 큰수 6, 작은수 2 : ${}_3C_2 = 3$가지
(3) (큰수+작은 수)=9
큰수 8, 작은수 1 : ${}_6C_2 = 15$가지 큰수 7, 작은수 2 : ${}_4C_2 = 6$가지 큰수 6, 작은수 3 : 1가지

전체 가지수$= {}_9C_4 = 126$

29. ㄱ. $\mathrm{P}(|X| \leqq a) = \mathrm{P}\left(|Z| \leqq \dfrac{a}{\sigma}\right)$

$\mathrm{P}(|Y| \leqq b) = \mathrm{P}\left(|Z| \leqq \dfrac{2b}{\sigma}\right)$

$\therefore a = 2b$

따라서 $a > b$ (참)

ㄴ. $\mathrm{P}\left(Y > \dfrac{a}{2}\right) = \mathrm{P}\left(Z > \dfrac{a}{\sigma}\right)$

$= \mathrm{P}\left(Z > \dfrac{2b}{\sigma}\right)$ (참)

ㄷ. $\mathrm{P}(Y \leqq b) = 0.7$이므로

$\mathrm{P}(Y \leqq b) = \mathrm{P}(Y < 0) + \mathrm{P}(0 \leqq Y \leqq b)$

$0.7 = 0.5 + \mathrm{P}(0 \leqq Y \leqq b)$

$\mathrm{P}(0 \leqq Y \leqq b) = 0.2$

$\therefore\ \mathrm{P}(|X| \leqq a) = \mathrm{P}(|Y| \leqq b)$

$= 2\mathrm{P}(0 \leqq Y \leqq b) = 0.4$

(거짓)

30. 100명을 추출하여 구한 신뢰도 95% 신뢰구간은

$\left[\hat{p_1} - 1.96\sqrt{\dfrac{\hat{p_1}(1-\hat{p_1})}{100}},\ \hat{p_1} + 1.96\sqrt{\dfrac{\hat{p_1}(1-\hat{p_1})}{100}}\right]$

$= \left[\dfrac{1}{10} - c,\ \dfrac{1}{10} + c\right]$이므로

$\hat{p_1} = \dfrac{1}{10},\ c = 1.96\sqrt{\dfrac{\frac{1}{10}\cdot\frac{9}{10}}{100}}$ 이다.

또, n명 추출 95% 신뢰구간

$$\left[\hat{p_2}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p_2}(1-\hat{p_2})}{n}},\ \hat{p_2}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p_2}(1-\hat{p_2})}{n}}\right]$$

$$=\left[\frac{1}{9}-s(n),\ \frac{1}{9}+s(n)\right]$$

$\therefore\ \hat{p_2}=\frac{1}{9}$이고 $s(n)=\frac{50}{81}c$이므로

$$1.96\sqrt{\frac{\frac{1}{9}\cdot\frac{8}{9}}{n}}=1.96\times\frac{50}{81}\cdot\sqrt{\frac{\frac{1}{10}\cdot\frac{9}{10}}{100}}$$

$$\frac{8}{9^2}\cdot\frac{1}{n}=\frac{50^2}{81^2}\cdot\frac{1}{100}\cdot\frac{9}{100}$$

$$n=\frac{8}{9^2}\cdot\frac{81^2}{50^2}\cdot\frac{100\cdot100}{9}$$

$$=9\cdot8\cdot2^2$$

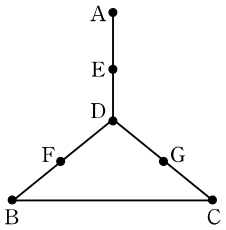
$$=72\times4=288$$

<선택-이산수학>

26. $a_{n+2}+a_{n+1}+a_n=6$,

$(n=1,2,3,\cdots)$에서

$n=1,2,3,\cdots$을 넣어보면,



$a_3=3,\ a_4=a_1=1,\ a_5=a_2=2,\ \ a_6=a_3=3$

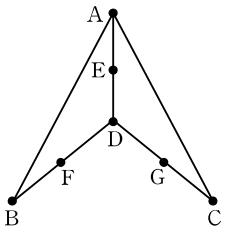
$$\therefore\ \sum_{k=1}^{11}a_k=3\times(1+2+3)+1+2$$

$$=21$$

27. 도식화해 보면

(단, 괄호 안은 작업시간)

E와 B는 F와 D를 작업하는 동안 하면 되므로 최소 작업시간은



$G(3)+F(4)+D(3)+C(5)+A(2)\Rightarrow17$

28. 최소 색의 수가 4개가 되려면 완전그래프가 되면 된다.

따라서, X, Y, Z가 두 개 연결되고 A, B, C, D에서 두 개가 연결되어야 한다.

${}_3C_2\times{}_4C_2=3\times6=18$

29. ⅰ) 전체 경우의 수 : 6!

ⅱ) AB가 이웃하는 경우 : 5!

BA가 이웃하는 경우 : 5!

CA가 이웃하는 경우 : 5!

ⅲ) ABC인 경우 : 4!

BCA인 경우 : 4!

CBA인 경우 : 4!

$\therefore\ 6!-(3\times5!-3\times4!)=432$

30. 7개의 꼭지점과 9개의 변이므로 3개의 변을 삭제해야 한다. 삼각형 ABC의 세 변 중 적어도 하나는 삭제해야 하므로

ⅰ) 세 변을 모두 삭제하는 경우 : 이 때는 생성수형도가 된다.

$\therefore$ 1개

ⅱ) 두 변을 삭제하는 경우 : 두 변 AB, AC를 삭제했다고 하면 네 변 DF, FB, DG, GC 중 하나를 삭제하면 된다.

$\therefore\ {}_3C_2\times4=12$(개)

ⅲ) 한 변을 삭제하는 경우 : 변 BC를 삭제했다고 하면

① AE, AD 중 하나를 삭제하는 경우

BF, FC, DG, GC 중 하나를 삭제하면 되므로

${}_2C_1\times4=8$(개)

② AE, AD를 모두 삭제하는 경우

생성수형도가 되지 않는다.

③ AE, AD를 모두 삭제하지 않는 경우

BF, FD 중 하나. DG, GC 중 하나를 삭제하면 되므로

$2\times2=4$(개)

$\therefore\ {}_3C_1\times(8+4)=36$(개)

$\therefore$ ⅰ), ⅱ), ⅲ)에서, $1+12+36=49$(개)