# 수리 영역('나'형)

◈정답

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1. ④ | 2. ① | 3. ② | 4. ③ | 5. ⑤ |
| 6. ② | 7. ① | 8. ① | 9. ② | 10. ④ |
| 11. ⑤ | 12. ③ | 13. ② | 14. ③ | 15. ⑤ |
| 16. ① | 17. ⑤ | 18. 27 | 19. 32 | 20. 16 |
| 21. 20 | 22. 23 | 23. 11 | 24. 18 | 25. 40 |
| 26. ④ | 27. ③ | 28. ③ | 29. ④ | 30. 47 |

◈해설

**1.** $9^{\frac{3}{2}} \times 27^{-\frac{2}{3}}$

$= (3^2)^{\frac{3}{2}} \times (3^3)^{-\frac{2}{3}} = 3^3 \times 3^{-2} = 3^{3-2} = 3^1 = 3$

**2.** $(A+B) \cdot A = \left\{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

따라서, 모든 성분의 합은 $1+0+5+3=9$

**3.** $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2}{\sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2+1}}$

$= \lim_{n\to\infty} \dfrac{2(\sqrt{n^2+2n} + \sqrt{n^2+1})}{2n-1}$

$= \lim_{n\to\infty} \dfrac{2\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}} + \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)}{2-\frac{1}{n}} = 2$

**4.** $y = 3 + \log_3(x^2 - 4x + 31)$

밑이 1보다 크므로 $3+\log_3(x^2-4x+31)$이 최소인 경우는 $x^2-4x+31$이 최소가 될 때이다.

$x^2 - 4x + 31 = (x-2)^2 + 27 \geqq 27$

$\therefore y = 3 + \log_3(x^2-4x+31) \geqq 3 + \log_3 27 = 6$

**5.** $1,\ a,\ b,\ c$가 이 순서로 등비수열이고 공비가 $r$이므로

$a = r,\ b = r^2,\ c = r^3$

$\therefore \log_8 c = \log_a b \Leftrightarrow \log_8 r^3 = \log_r r^2 = 2$

$\therefore \log_8 r^3 = 2$

$\therefore r^3 = 64$

$\therefore r = 4$

**6.** $a\log b = \log_2 10 \times \log 2\sqrt{2} = \dfrac{3}{2}$

**7.** $y = f(x)$와 $y = g(x)$는 $x = 2$에 대하여 대칭이므로 $f(x) = g(4-x)$

$\Rightarrow a^{bx-1} = a^{1-b(4-x)}$

$\Rightarrow a^{bx-1} = a^{1-4b+bx}$

$\Rightarrow a^{-1} = a^{1-4b}$ ……㉠

$f(4) + g(4) = \dfrac{5}{2}$이므로

$a^{4b-1} + a^{1-4b} = \dfrac{5}{4}$ ……㉡

㉠과 ㉡에서

$a + \dfrac{1}{a} = \dfrac{5}{2}\ (0 < a < 1)$

$\therefore\ a = \dfrac{1}{2}$ ……㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$b = \dfrac{1}{2}$

따라서 $a + b = 1$

**8.** 핸드볼 공의 무게를 $X$라 하면

$X \sim \mathrm{N}(350,\ 16^2)$

크기 64인 표본의 평균을 $\overline{X}$라 하면

$\mathrm{E}(\overline{X}) = 350$

$\mathrm{V}(\overline{X}) = \dfrac{16^2}{64} = 2^2$

$\therefore\ \overline{X} \sim \mathrm{N}(350,\ 2^2)$

$\therefore\ \mathrm{P}(\overline{X} \geqq 355) + \mathrm{P}(\overline{X} \leqq 346)$

$= \mathrm{P}\left(Z \geqq \dfrac{355-350}{2}\right) + \mathrm{P}\left(Z \leqq \dfrac{346-350}{2}\right)$

$= \mathrm{P}(Z \geqq 2.5) + \mathrm{P}(Z \leqq -2)$

$= 0.0062 + 0.0228 = 0.0290$

**9.** $\left(x+\frac{1}{x^3}\right)^4$의 전개식에서 $\frac{1}{x^4}$의 계수는

${}_4C_2(x)^2\left(\frac{1}{x^3}\right)^2$에서 ${}_4C_2$이다.

$\therefore {}_4C_2=6$

**10.** $a_{m+1}=\frac{m^2}{(m+1)(m+2)}\cdot a_m$ ……㉮

이므로

$a_{m+1}=\frac{m^2}{(m+1)(m+2)}\cdot a_m$

$=\frac{m^2}{(m+1)(m+2)}\cdot\frac{(m-1)^2}{(m)(m+1)}\cdot a_{m-1}$

$=\frac{m^2}{(m+1)(m+2)}\cdot\frac{(m-1)^2}{m(m+1)}\cdot\frac{(m-2)^2}{(m-1)(m)}\cdot a_{m-2}$

…

$=\frac{m^2}{(m+1)(m+2)}\cdot\frac{(m-1)^2}{m(m+1)}\cdot\frac{(m-2)^2}{(m-1)(m)}$

…… $\frac{2^2}{3\cdot 4}\cdot\frac{1^2}{2\cdot 3}\cdot a_1$

$=\frac{2\cdot 1^2}{(m+1)^2(m+2)}\cdot a_1$

$=\frac{1}{(m+1)^2(m+2)}$ ……㉯

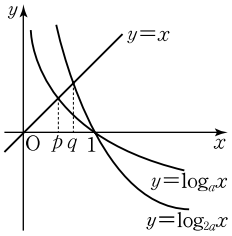
$=\frac{1}{(m+1)^2}-\frac{1}{(m+1)(m+2)}$ ……㉰

**11.** ㄱ. $p=\frac{1}{2}$이면 $\log_a\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$a^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$

$a=\frac{1}{4}$ (참)

ㄴ. 그래프를 그리면




$\therefore p<q$ (참)

ㄷ. $\log_a p=p$이므로 $a^p=p$…㉠

$\log_{2a}q=q$이므로 $(2a)^q=q\Rightarrow a^q=\frac{q}{2^q}$…㉡

㉠, ㉡에서 $a^{p+q}=a^p\cdot a^q=\frac{pq}{2^q}$(참)

**12.** ㄱ. $A=\begin{pmatrix}4&9\\3&2\end{pmatrix}$에서

$\log_4 2=\log_9 3$이므로

$A\in S$ ……(참)

ㄴ. $A\in U$이고 $A\notin S$라면

$\log_a d=m$, $\log_b c=n$ $(m\neq n)$인 $m$, $n$이 존재한다.

위에서 $d=a^m$, $c=b^n$이므로

$ad-bc=a^{m+1}-b^{n+1}=0$ $(\because a\neq b,\ bc\neq 1)$

인 예를 구하면 반례이다. 반례로 $m=5$, $n=2$, $a=2$, $b=4$를 들 수 있다.

ㄷ. $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$에서 $\log_a d=\log_b c=k$라 하면

$d=a^k$, $c=b^k$이므로

$ad-bc=a^{k+1}-b^{k+1}\neq 0$ $(a\neq b,\ bc\neq 1)$

……(참)

**13.** $x_{2n}$은 $(x_{2n-1},\ {x_{2n-1}}^2)$을 지나고 기울기 $-1$인 직선과 $y=x^2$과의 교점이므로

$x^2=-(x-x_{2n-1})+{x_{2n-1}}^2$

$x^2+x-x_{2n-1}(1+x_{2n-1})=0$

$\therefore\ x_{2n-1}+x_{2n}=-1$

$\therefore\ x_{2n-1}=-1-x_{2n}$

또 $x_{2n+1}$은 $(x_{2n},\ {x_{2n}}^2)$ 지나고 기울기 1인 직선과 $y=x^2$의 교점이므로

$x^2=(x-x_{2n})+{x_{2n}}^2$

$x^2-x+x_{2n}(1-x_{2n})=0$

$\therefore\ x_{2n+1}+x_{2n}=1$

$x_{2n+1}=1-x_{2n}$

$\therefore\ x_0=0$

$x_1=1$

$x_2=-2$

$x_3=3$

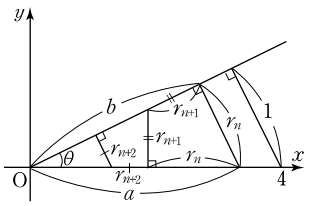
$x_4=-4$

$l_n=\sqrt{2}(|x_{n-1}|+|x_n|)$

$=\sqrt{2}(n-1+n)=\sqrt{2}(2n-1)$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}(2n-1)}{n}=2\sqrt{2}$

**14.**




$\sin\theta = \frac{1}{4}$이므로 $b : a = \sqrt{15} : 4$

$\therefore\ b - r_{n+1} : r_{n+1} = 4 : 1$

$a : r_n = 4 : 1$

$4r_{n+1} = b - r_{n+1}$

$b = 5r_{n+1}$

$a = 4r_n$

$\therefore\ 5r_{n+1} : 4r_n = \sqrt{15} : 4$

$r_{n+1} = \frac{4\sqrt{15}}{20} r_n$

$r_{n+1} = \frac{\sqrt{15}}{5} r_n$

$\therefore\ S_n$의 공비는 $\frac{15}{25} = \frac{3}{5}$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\pi}{1 - \frac{3}{5}} = \frac{5}{2}\pi$

**15.** 5일간 총 봉사시간이 8시간이 되는 경우는 아래와 같다.

i ) (4, 1, 1, 1, 1)

ii ) (3, 2, 1, 1, 1)

iii ) (2, 2, 2, 1, 1)이고

따라서, 구하는 경우의 수는 $\frac{5!}{4!} + \frac{5!}{3!} + \frac{5!}{3!\,2!} = 35$

**16.** 첫 번째 숫자가 같을 확률은

(철수, 영희) : (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)

5가지이므로

$5 \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{5}$

따라서, 첫 번째 숫자가 다를 확률은

$1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

첫 번째 숫자가 다를 경우 남은 4개의 숫자에서 같은 수는 3개 뿐이므로 두 번째 숫자가 같을 확률은

$3 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$

따라서, 구하는 확률은 $\frac{4}{5} \times \frac{3}{16} = \frac{3}{20}$

**17.** $I(E) = \log_{\frac{1}{2}} P(E)$이므로

ㄱ. $P(E) = \frac{1}{2}$이므로 $I(E) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 1$ (참)

ㄴ. 두 사건 $A$, $B$가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$I(A \cap B) = \log_{\frac{1}{2}} \mathrm{P}(A \cap B) = \log_{\frac{1}{2}} \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$= \log_{\frac{1}{2}} \mathrm{P}(A) + \log_{\frac{1}{2}} \mathrm{P}(B) = I(A) + I(B)$ (참)

ㄷ. $\mathrm{P}(A) \leqq \mathrm{P}(A \cup B)$이고 $\mathrm{P}(B) \leqq \mathrm{P}(A \cup B)$이므로

$I(A) \geqq I(A \cup B)$, $I(B) \geqq I(A \cup B)$

$\therefore\ I(A) + I(B) \geqq 2I(A \cup B)$ (참)

**18.** $y = 5^{x-1}$의 그래프가 $(a, 5)$, $(3, b)$를 지나므로

$5 = 5^{a-1}$, $a = 2$

$b = 5^{3-1} = 25$

$\therefore a + b = 27$

**19.** 첫째항을 $a$라 하면

$a_1 + a_5 + a_9 = a + (a + 4d) + (a + 8d)$

$= 3a + 12d$

$= 3a + 24 = 45$

$\therefore\ a = 7$

따라서, $a_1 + a_{10} = a + a + 9d = 14 + 18 = 32$

**20.** 수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a$, 공비를 $r$

수열 $\{b_n\}$의 첫째항을 $b$, 공비를 $r$라 하면

$a - b = 1$

$\frac{a}{1-r} = 8$, $\frac{b}{1-r} = 6$

$\therefore \frac{a-b}{1-r} = 2$에서 $1 - r = \frac{1}{2}$

$\therefore r = \frac{1}{2}$

$\therefore a = 4$, $b = 3$

따라서, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \frac{ab}{1-r^2} = \frac{12}{1 - \frac{1}{4}} = 16$

**21.** $\frac{3a}{\log_a b} = \frac{b}{2\log_b a} = \frac{3a+b}{3} = k\,(k \neq 0)$라 하면

$3a = k \cdot \log_a b$

$b = 2k \cdot \log_b a$

$3a + b = 3k$

$\therefore k\log_a b + 2k\log_b a = 3k$

$\therefore \log_a b + 2\log_b a = 3$

$\log_a b = t$라 하면

$t + \dfrac{2}{t} = 3,\ \ t^2 - 3t + 2 = 0$

$\therefore t = \log_a b = 2(\because 1 < a < b)$

따라서, $10\log_a b = 20$

**22.** $i^m \cdot (-i)^n = (-1)^n i^{m+n} = 1$

$\therefore n$이 짝수이면서 $m+n$이 4의 배수이거나 $n$이 홀수이면서 $m+n$이 4의 배수가 아닌 짝수이어야 한다.

$\therefore$만족하는 순서쌍 $(m, n)$은

$(2, 2),\ (6, 2), (4, 4), (2, 6), (6, 6),$

$(1, 1),\ (5, 1),\ (3, 3),\ (1, 5),\ (5, 5)$이다.

따라서, 구하는 확률은 $\dfrac{10}{36} = \dfrac{5}{18}$

따라서, $p + q = 18 + 5 = 23$

**23.** 자연수 $p$를 $n$으로 나누었을 때 몫을 $q$, 나머지를 $q$라 하자.

$p = q \cdot n + q\ \ (q = 1,\ 2.\ 3,\ \cdots,\ n-1)$

$$a_n = \sum_{k=1}^{n-1}(kn+k) = \frac{n(n-1)}{2} \cdot n + \frac{n(n-1)}{2}$$

$$= \frac{(n-1)n(n+1)}{2}$$

따라서, $a_n > 500$을 만족하는 자연수 $n$의 최소값은 11이다.

**24.** $A^4 + A^5 = (A^2 + A^3)A^2$

$= (-3A - 3E)A^2$

$= -3A^3 - 3A^2$

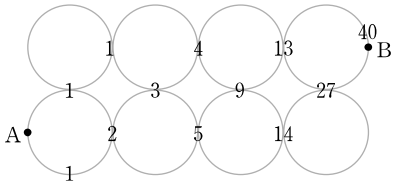
$= -3(A^3 + A^2)$

$= -3(-3A - 3E)$

$= 9A + 9E$

따라서, $A$의 모든 성분의 합이 0이므로 $A^4 + A^5$의 모든 성분의 합은 18이다.

**25.** A지점에서 출발하여 최단거리로 B 지점까지 가는 동안 A에서 출발하여 각 지점까지의 최단경로의 수를 적으면 아래와 같다.




따라서 구하는 경우의 수는 40(가지)

**26.** $\mathrm{P}(A) = \dfrac{1}{2},\ \mathrm{P}(B^C) = \dfrac{2}{3},\ \mathrm{P}(B|A) = \dfrac{1}{6}$에서

$\mathrm{P}(B) = 1 - \mathrm{P}(B^C) = \dfrac{1}{3}$

$\therefore \mathrm{P}(B \cap A) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B|A) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{12}$

$$\mathrm{P}(A^C|B) = \frac{\mathrm{P}(A^C \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{12}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$$

**27.** 두 수 $a, b$의 가수가 같으면 $\log a - \log b$는 정수이어야 한다.

$\log a - \log b = m$(단, $m$은 정수) $\therefore a = b \times 10^m$

즉, 두 수 $a, b$가 $a = b \times 10^m$($m$은 정수)를 만족하면 $f(a) = f(b)$

따라서 $N = 10 \times$(자연수) 꼴의 수들은 더 작은 자연수들 중에서 가수가 같은 수가 존재한다.

$N = 10 \times$(자연수)의 꼴의 자연수는

$\{10, 20,\ 30, \cdots,\ 150\}$이므로 구하는 개수는

$150 - 15 = 135$(개)

**28.** $BAB = E$의 양 변의 오른쪽에 $A$를 곱하면

$BABA = A,\ B \cdot A = A^{-1}(\because ABA = A^{-1})$

$\therefore B = A^2$

$BAB = E$에서 $B = A^2$을 대입하면 $A^5 = E$

**29.** 모평균 $\mathrm{E}(X)$와 표본평균의 평균 $\mathrm{E}(\overline{X})$는 같으므로 $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(\overline{X}) = 18$

표에서

$\mathrm{E}(X) = 10 \times \dfrac{1}{2} + 20 \times a + 30 \times \left(\dfrac{1}{2} - a\right) = 18$

이므로 $a = \dfrac{1}{5}$

$\therefore \mathrm{P}(X = 10) = \dfrac{1}{2},\ \mathrm{P}(X = 20) = \dfrac{1}{5},$

$\mathrm{P}(X = 20) = \dfrac{3}{10}$

크기가 2인 표본을 $\{X_1, X_2\}$라 하면

$\overline{X}=20$인 경우는 $\{X_1=10,\ X_2=30\}$,

$\{X_1=20,\ X_2=20\}$, $\{X_1=30,\ X_2=10\}$이므로

$\mathrm{P}(\overline{X}=20)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{10}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{3}{10}\times\frac{1}{2}=\frac{17}{50}$

**30.** $m^2+n^2\leqq 25$가 성립하는 경우는

i ) $m\leqq 3$인 경우 $n\leqq 4$이어야 하므로

$3\times 4=12$(가지)

ii ) $m=4$인 경우 $n\leqq 3$이어야 하므로 3(가지)

iii ) $m\geqq 5$인 경우 $m^2+n^2\leqq 25$가 성립할 수 없다.

i), ii), iii)에서 $m^2+n^2\leqq 25$가 성립하는 경우의 수는 15(가지)

따라서 한 번의 시행에서 사건 $E$가 일어나는 확률은 $\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$

12회의 독립시행에서 사건 $E$가 일어나는 횟수를 확률변수 $X$라 하면 $X$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(12,\ \frac{5}{12}\right)$를 따른다.

$\therefore \mathrm{V}(X)=12\times\frac{5}{12}\times\frac{7}{12}=\frac{35}{12}$ $\quad\therefore p+q=47$