

모의수리사고평가

수험번호(고교명) () 성명 ()

수험생 유의사항

1. 120분 안에 답안을 작성하시오.
2. 문항별로 답안지 1장 범위 내에서 답안을 작성하시오.
3. 제목을 쓰지 말고 본문부터 시작하시오.
4. 수정 시 검정 볼펜으로 줄을 긋고 다시 쓰시오.
5. 답안지와 문제지 및 연습지를 함께 제출하시오.
6. 다음 경우는 0점 처리됩니다.
 - 1) 답안을 검정 볼펜으로 작성하지 않은 경우
 - 2) 자신의 신원을 드러내는 표기나 표현을 한 경우
 - 3) 수정액이나 수정테이프를 사용한 경우
 - 4) 답안을 해당 답란에 작성하지 않은 경우

〈문제 1〉 다음 제시문을 읽고 문제에 답하시오.

<제시문>

모든 자연수 n 에 대하여 $S_n < S_{n+1}$ 이면서 $S_n < M$ 인 실수 M 이 존재하면 수열 $\{S_n\}$ 은 수렴하고 그 수렴하는 값은 M 보다 작거나 같다.

$x \geq 1$ 인 범위에서 다음 조건 (가)와 (나)를 만족하는 연속함수 $f(x)$ 가 있을 때,

- (가) $f(x) > 0$
 (나) $1 \leq x < y$ 에 대하여 $f(x) > f(y)$

(1) 자연수 n 에 대하여 $A_n = \int_1^n f(x)dx$ 일 때, 다음 두 명제는 동치임을 설명하시오.

명제 1 : 무한급수 $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ 는 수렴한다.

명제 2 : $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ 은 수렴한다.

(2) 무한급수 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+2)(\ln(k+1))^2}$ 이 수렴함을 설명하시오.

〈문제 2〉 아래 제시된 자연수 m, n 에 대하여 정의되는 세 종류의 무한수열에 대하여 문제에 답하시오.

<제시문>

- 가. 무한수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 \neq 0$, $a_2 = 3$, $a_m a_n = a_{n+m-1} + a_{n-m+1}$ 을 만족한다. (단, $n \geq m$)
 나. 무한수열 $\{b_n\}$ 은 $b_1 = 1$, $b_2 = 1$, $b_{n+2} = b_{n+1} + b_n$ 을 만족한다.
 다. 무한수열 $\{c_n\}$ 은 $c_1 = 2$, $c_2 = 1$, $c_{n+2} = c_{n+1} + c_n$ 을 만족한다.

(1) 모든 자연수 $m \geq 2, n$ 에 대하여 무한수열 $\{b_n\}$ 은 관계식 $b_{m+n} = b_{n+1}b_m + b_n b_{m-1}$ 이 성립함을 보이시오.

(2) 모든 자연수 n 에 대하여 두 무한수열 $\{a_n\}$ 과 $\{c_n\}$ 의 관계식은 $a_n = c_{2n-1}$ 임을 보이시오.

한양대학교 2013학년도 신입학전형 수시 1차 모의수리사고평가

학업우수자(의예과)
한양우수과학인(의예과)

출제의도, 평가내용 및 예시답안

1. 출제 의도

수리사고는 단순히 어떤 값을 계산하는 것이 아니라 수학적 사고를 요구하는 문제로 구성된다. 고교과정의 수학 지식을 충분히 갖추고 있는가, 문제를 해결하는 능력이 있는가, 자신의 생각을 정확히 표현할 수 있는가 등을 측정하는 것을 목표로 한다.

2. 문제해설 및 평가내용

<문제 1>

- 제시문을 활용할 수 있는가?
- 적분의 뜻을 이해하고 있는가?
- 적분의 성질을 이해하고 있으며 활용할 수 있는가?
- 적분계산법과 미분을 할 수 있는가?
- 수열의 극한과 무한급수를 이해하는가?

<문제 2>

- 주어진 수열에 대한 정보를 가지고 일반항으로 표현 할 수 있는가?
- 수열의 일반항이 성립함을 증명할 수 있는가?
- 두 수열의 관계를 유추하는가?

3. 배점 및 예시답안

<문제1>

(1) 명제 1) \rightarrow 명제 2)

적분과 넓이의 관계에 의하여, $n > 1$ 이면 $A_n < \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$ 이다.

가정에 의하여 $\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = M$ 이라하자.

적분과 넓이의 관계에 의하여, $A_n < A_{n+1}$ 이며 $A_n < M$ 이다.

따라서 수열 $\{A_n\}$ 은 수렴한다.

명제 2) \rightarrow 명제 1)

적분과 넓이의 관계에 의하여, $n > 1$ 이면 $A_n > \sum_{k=2}^n f(k)$ 이다.

가정에 의하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = M$ 이라하자.

적분과 넓이의 관계에 의하여, $\sum_{k=2}^n f(k) < \sum_{k=2}^{n+1} f(k)$ 이며 $\sum_{k=2}^n f(k) < M$ 이다.

따라서 수열 $\{\sum_{k=1}^n f(k)\}$ 은 수렴한다.

$B_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k+2)(\ln(k+1))^2}$ 이고 $C_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k+1)(\ln(k+1))^2}$ 라 하자.

$k+2 > k+1$ 이므로 $B_n < C_n$ 이다.

그리고 $C_n < D_n = \int_1^n \frac{1}{(x+1)(\ln(x+1))^2} dx$ 이므로 수열 $\{D_n\}$ 은 수렴함을 보이면 충분하다.

$z = \ln(x+1)$ 이라 두면 $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x+1}$ 이므로

$$D_n = \int_{\ln 2}^{\ln(n+1)} \frac{1}{z^2} dz = -\frac{1}{z} \Big|_{z=\ln 2}^{z=\ln(n+1)} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln(n+1)}$$

$B_n < B_{n+1}$ 이고 $B_n < \frac{1}{\ln 2}$ 이므로 수열 $\{B_n\}$ 은 수렴한다.

따라서 무한급수 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+2)(\ln(k+1))^2}$ 은 수렴한다.

문항(1). (40점)

명제 1) \rightarrow 명제 2)

적분과 넓이의 관계에 의하여, $n > 1$ 이면 $A_n < \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$ 이다.

가정에 의하여 $\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = M$ 이라하자.

적분과 넓이의 관계에 의하여, $A_n < A_{n+1}$ 이며 $A_n < M$ 이다.

따라서 수열 $\{A_n\}$ 은 수렴한다. ----- (20점)

명제 2) \rightarrow 명제 1)

적분과 넓이의 관계에 의하여, $n > 1$ 이면 $A_n > \sum_{k=2}^n f(k)$ 이다.

가정에 의하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = M$ 이라하자.

적분과 넓이의 관계에 의하여, $\sum_{k=2}^n f(k) < \sum_{k=2}^{n+1} f(k)$ 이며 $\sum_{k=2}^n f(k) < M$ 이다.

따라서 수열 $\{\sum_{k=1}^n f(k)\}$ 은 수렴한다. ----- (20점)

문항(2). (60점)

$$B_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k+2)(\ln(k+1))^2} \text{ 이고 } C_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k+1)(\ln(k+1))^2} \text{ 라 하자.}$$

$k+2 > k+1$ 이므로 $B_n < C_n$ 이다. ----- (10점)

$$\text{그리고 } C_n < D_n = \int_1^n \frac{1}{(x+1)(\ln(x+1))^2} dx \text{ 이므로}$$

수열 $\{D_n\}$ 이 수렴함을 보이면 충분하다. ----- (10점)

$$z = \ln(x+1) \text{ 이라 두면 } \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x+1} \text{ 이므로}$$

$$D_n = \int_{\ln 2}^{\ln(n+1)} \frac{1}{z^2} dz = -\frac{1}{z} \Big|_{z=\ln 2}^{z=\ln(n+1)} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln(n+1)} \text{ 이다.} \quad \text{----- (20점)}$$

$$B_n < B_{n+1} \text{ 이고 } B_n < \frac{1}{\ln 2} \text{ 이므로 수열 } \{B_n\} \text{은 수렴한다.}$$

따라서 무한급수 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+2)(\ln(k+1))^2}$ 이 수렴한다. ----- (20점)

<문제2>

세 개의 수열 중 무한 수열 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 에 대해서 일반항을 구하여 보면 다음과 같다.

$a_1 \neq 0$, $a_2 = 3$, $a_m a_n = a_{n+m-1} + a_{n-m+1}$ 를 만족하는 수열의 일반항 a_n 은

$m = 2$ 을 $a_m a_n = a_{n+m-1} + a_{n-m+1}$ 에 대입하면 $a_2 a_n = a_{n+1} + a_{n-1}$ 이 되고

$a_2 = 3$ 가 주어졌으므로 $a_{n+1} = 3a_n - a_{n-1}$ 이다.

따라서 $a_{n+1} = 3a_n - a_{n-1}$, 모든 $n \geq 2$ ----- ①

이고 $m = 1, n = 2$ 를 대입하면 $a_1 a_2 = a_2 + a_2$ 이므로 $a_1 = 2$ 이다. ----- ②

세 개의 수열을 계산해 보면

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
a_n	2	3	7	18	47	123	322	843	2207	5778	15127	39603	103682
b_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233
c_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	322

문항(1). (증명 : 전체 40점)

(1) 모든 자연수 $m \geq 2, n$ 에 대하여 무한수열 $\{b_n\}$ 은 관계식 $b_{m+n} = b_{n+1}b_m + b_n b_{m-1}$ 이 성립함을 보이시오.

$b_{m+n} = b_{n+1}b_m + b_n b_{m-1}$ 을 모든 $m \geq 2$ 에 대해 수학적 귀납법에 의하여 증명하여 보면

$m = 2$ 인 경우 모든 n 에 대하여 $b_{n+2} = b_{n+1}b_2 + b_n b_1 = b_{n+1} \cdot 1 + b_n \cdot 1 = b_{n+1} + b_n$ 이므로 성립한다.

임의의 k ($3 \leq k \leq m-1$)와 모든 n 에 대하여 $b_{k+n} = b_{n+1}b_k + b_n b_{k-1}$ 성립한다고 가정하면,

$$b_{m-1+n} = b_{n+1}b_{m-1} + b_n b_{m-2} \quad ----- (*)$$

이므로 주어진 수열 $\{b_n\}$ 의 관계식 $b_{m+n} = b_{n+m-1} + b_{n+m-2}$ 으로 부터

$$\begin{aligned} b_{m+n} &= b_{n+m-1} + b_{n+m-2} \\ &= b_{n+1}b_{m-1} + b_n b_{m-2} + b_{n+1}b_{m-2} + b_n b_{m-3} \quad ((*)\text{을 이용}) \\ &= b_{n+1}(b_{m-1} + b_{m-2}) + b_n(b_{m-2} + b_{m-3}) \\ &= b_{n+1}b_m + b_n b_{m-1} \end{aligned}$$

문항(2). 모든 자연수 n 에 대하여 두 무한수열 $\{a_n\}$ 과 $\{c_n\}$ 의 관계식은 $a_n = c_{2n-1}$ 임을 보이시오.

[20점]

①에서의 수열 a_n 의 일반항 관계식 $a_{n+1} = 3a_n - a_{n-1}$ 과

②에서의 초항 $a_1 = 2$ 를 구하여야 다음의 증명을 완성할 수 있다.

[증명 : 40점]

수학적 귀납법에 의하여 모든 자연수 n 에 대해 관계식 $a_n = c_{2n-1}$ 을 증명하여 보면

$$n=1 : a_1 = 2 = c_1$$

임의의 k ($2 \leq k \leq n-1$)에 대하여 $a_k = c_{2k-1}$ 성립된다고 가정하면, $a_{n-1} = c_{2n-3}$ 이므로

$$\begin{aligned} a_n &= 3a_{n-1} - a_{n-2} \\ &= 3c_{2n-3} - c_{2n-5} \\ &= 3(c_{2n-4} + c_{2n-5}) - c_{2n-5} \\ &= 3c_{2n-4} + 2c_{2n-5} \\ &= 2c_{2n-3} + c_{2n-4} \\ &= c_{2n-2} + c_{2n-3} \\ &= c_{2n-1} \end{aligned}$$

모의수리사고평가

수험번호(고교명) () 성명 ()

수험생 유의사항

1. 120분 안에 답안을 작성하시오.
2. 문항별로 답안지 1장 범위 내에서 답안을 작성하시오.
3. 제목을 쓰지 말고 본문부터 시작하시오.
4. 수정 시 검정 볼펜으로 줄을 긋고 다시 쓰시오.
5. 답안지와 문제지 및 연습지를 함께 제출하시오.
6. 다음 경우는 0점 처리됩니다.
 - 1) 답안을 검정 볼펜으로 작성하지 않은 경우
 - 2) 자신의 신원을 드러내는 표기나 표현을 한 경우
 - 3) 수정액이나 수정테이프를 사용한 경우
 - 4) 답안을 해당 답란에 작성하지 않은 경우

〈문제 1〉 다음 제시문을 읽고 문제에 답하시오.

<제시문>

모든 자연수 n 에 대하여 $S_n < S_{n+1}$ 이면서 $S_n < M$ 인 실수 M 이 존재하면 수열 $\{S_n\}$ 은 수렴하고 그 수렴하는 값은 M 보다 작거나 같다.

$x \geq 1$ 인 범위에서 다음 조건 (가)와 (나)를 만족하는 연속함수 $f(x)$ 가 있을 때,

- (가) $f(x) > 0$
 (나) $1 \leq x < y$ 에 대하여 $f(x) > f(y)$

(1) 자연수 n 에 대하여 $A_n = \int_1^n f(x)dx$ 일 때, 다음 두 명제는 동치임을 설명하시오.

명제 1 : 무한급수 $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ 는 수렴한다.

명제 2 : $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ 은 수렴한다.

(2) 무한급수 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+2)(\ln(k+1))^2}$ 이 수렴함을 설명하시오.

〈문제 2〉 다음 제시문을 읽고 문제에 답하시오.

f 와 g 는 폐구간 $[0, a]$ 에서 정의된 연속함수이고, 폐구간 $[0, a]$ 의 임의의 원소 x 에 대하여, 다음을 만족한다.

$$f(a-x) = f(x), \quad g(x) + g(a-x) = k \quad (\text{단, } k \text{는 실수})$$

(1) $\int_0^a f(x)g(x)dx = \frac{1}{2} k \int_0^a f(x)dx$ 임을 보이시오.

(2) 정적분 $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$ 값을 구하시오.

한양대학교 2013학년도 신입학전형 수시 1차 모의수리사고평가

한 양 우 수 과 학 인
(의 예 과 외)

출제의도, 평가내용 및 예시답안

1. 출제 의도

수리사고는 단순히 어떤 값을 계산하는 것이 아니라 수학적 사고를 요구하는 문제로 구성된다. 고교과정의 수학 지식을 충분히 갖추고 있는가, 문제를 해결하는 능력이 있는가, 자신의 생각을 정확히 표현할 수 있는가 등을 측정하는 것을 목표로 한다.

2. 문제해설 및 평가내용

<문제 1>

- 제시문을 활용할 수 있는가?
- 적분의 뜻을 이해하고 있는가?
- 적분의 성질을 이해하고 있으며 활용할 수 있는가?
- 적분계산법과 미분을 할 수 있는가?
- 수열의 극한과 무한급수를 이해하는가?

<문제 2>

- 적분의 기본성질, 연산의 성질, 치환적분의 개념 등을 명확히 이해하고 적용할 수 있는지를 평가
- 제시문의 내용을 이해하고 활용하여 풀 수 있는가를 평가

3. 배점 및 예시답안

<문제1>

(1) 문제 1) → 문제 2)

적분과 넓이의 관계에 의하여, $n > 1$ 이면 $A_n < \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$ 이다.

가정에 의하여 $\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = M$ 이라하자.

적분과 넓이의 관계에 의하여, $A_n < A_{n+1}$ 이며 $A_n < M$ 이다.

따라서 수열 $\{A_n\}$ 은 수렴한다.

명제 2) \rightarrow 명제 1)

적분과 넓이의 관계에 의하여, $n > 1$ 이면 $A_n > \sum_{k=2}^n f(k)$ 이다.

가정에 의하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = M$ 이라하자.

적분과 넓이의 관계에 의하여, $\sum_{k=2}^n f(k) < \sum_{k=2}^{n+1} f(k)$ 이며 $\sum_{k=2}^n f(k) < M$ 이다.

따라서 수열 $\{\sum_{k=1}^n f(k)\}$ 은 수렴한다.

$B_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k+2)(\ln(k+1))^2}$ 이고 $C_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k+1)(\ln(k+1))^2}$ 라 하자.

$k+2 > k+1$ 이므로 $B_n < C_n$ 이다.

그리고 $C_n < D_n = \int_1^n \frac{1}{(x+1)(\ln(x+1))^2} dx$ 이므로 수열 $\{D_n\}$ 은 수렴함을 보이면 충분하다.

$z = \ln(x+1)$ 이라 두면 $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x+1}$ 이므로

$$D_n = \int_{\ln 2}^{\ln(n+1)} \frac{1}{z^2} dz = -\frac{1}{z} \Big|_{z=\ln 2}^{z=\ln(n+1)} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln(n+1)}$$

$B_n < B_{n+1}$ 이고 $B_n < \frac{1}{\ln 2}$ 이므로 수열 $\{B_n\}$ 은 수렴한다.

따라서 무한급수 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+2)(\ln(k+1))^2}$ 은 수렴한다.

문항(1). (40점)

명제 1) \rightarrow 명제 2)

적분과 넓이의 관계에 의하여, $n > 1$ 이면 $A_n < \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$ 이다.

가정에 의하여 $\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = M$ 이라하자.

적분과 넓이의 관계에 의하여, $A_n < A_{n+1}$ 이며 $A_n < M$ 이다.

따라서 수열 $\{A_n\}$ 은 수렴한다. ----- (20점)

명제 2) \rightarrow 명제 1)

적분과 넓이의 관계에 의하여, $n > 1$ 이면 $A_n > \sum_{k=2}^n f(k)$ 이다.

가정에 의하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = M$ 이라하자.

적분과 넓이의 관계에 의하여, $\sum_{k=2}^n f(k) < \sum_{k=2}^{n+1} f(k)$ 이며 $\sum_{k=2}^n f(k) < M$ 이다.

따라서 수열 $\{\sum_{k=1}^n f(k)\}$ 은 수렴한다. ----- (20점)

문항(2). (60점)

$$B_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k+2)(\ln(k+1))^2} \text{ 이고 } C_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k+1)(\ln(k+1))^2} \text{ 라 하자.}$$

$k+2 > k+1$ 이므로 $B_n < C_n$ 이다. ----- (10점)

$$\text{그리고 } C_n < D_n = \int_1^n \frac{1}{(x+1)(\ln(x+1))^2} dx \text{ 이므로}$$

수열 $\{D_n\}$ 이 수렴함을 보이면 충분하다. ----- (10점)

$$z = \ln(x+1) \text{ 이라 두면 } \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x+1} \text{ 이므로}$$

$$D_n = \int_{\ln 2}^{\ln(n+1)} \frac{1}{z^2} dz = -\frac{1}{z} \Big|_{z=\ln 2}^{z=\ln(n+1)} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln(n+1)} \text{ 이다.} \quad \text{----- (20점)}$$

$$B_n < B_{n+1} \text{ 이고 } B_n < \frac{1}{\ln 2} \text{ 이므로 수열 } \{B_n\} \text{은 수렴한다.}$$

따라서 무한급수 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+2)(\ln(k+1))^2}$ 이 수렴한다. ----- (20점)

<문제 2>

문항(1) (30점) 제시문의 조건 $f(a-x) = f(x)$, $g(x) + g(a-x) = k$ 로부터

$$\begin{aligned} \int_0^a f(x)g(x) dx &= \int_0^a f(x)(k-g(a-x)) dx \\ &= k \int_0^a f(x) dx - \int_0^a f(x)g(a-x) dx \\ &= k \int_0^a f(x) dx - \int_a^0 f(a-t)g(t)(-dt) \\ &= k \int_0^a f(x) dx - \int_0^a f(a-t)g(t) dt \\ &= k \int_0^a f(x) dx - \int_0^a f(x)g(x) dx \end{aligned}$$

임을 알 수 있다.

$$\text{따라서, } \int_0^a f(x)g(x) dx = \frac{1}{2}k \int_0^a f(x) dx \text{ 이다.} \quad \text{----- 30점}$$

문항(2). (70점)

$f(x) = \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$, $g(x) = x$ 라 하면, $f(x), g(x)$ 는 폐구간 $[0, \pi]$ 에서 연속함수이고, 폐구간 $[0, \pi]$ 의 임의의

원소 x 에 대하여,

$$f(\pi-x) = \frac{\sin(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)} = \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} = f(x), \quad g(x) + g(\pi-x) = x + (\pi-x) = \pi$$

을 만족한다. ----- 30점

(1)번의 결과로부터

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx$$

이고, $t = \cos x$ 로 치환하면,

$$\frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi}{2} \int_1^{-1} \frac{-1}{1 + t^2} dt = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{1 + t^2} dt$$

이 고, 다시 $t = \tan \theta$ 로 치환하면,

$$\frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{1 + t^2} dt = \frac{\pi}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} d\theta = \frac{\pi}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 1 d\theta = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}.$$

..... 40점