한양대학교 2013학년도 신입학전형 수시 2차

자 연 계

모 의 논 술 (2회)

수험번호(고교명) (　　) 성명 (　　)

수험생 유의사항

1. 120분 안에 답안을 작성하시오.
2. 문항별로 답안지 1장 범위 내에서 답안을 작성하시오.
3. 제목을 쓰지 말고 본문부터 시작하시오.
4. 수정 시 검정 볼펜으로 줄을 긋고 다시 쓰시오.
5. 답안지와 문제지 및 연습지를 함께 제출하시오.
6. 다음 경우는 0점 처리됩니다.
   1) 답안을 검정 볼펜으로 작성하지 않은 경우
   2) 자신의 신원을 드러내는 표기나 표현을 한 경우
   3) 수정액이나 수정테이프를 사용한 경우
   4) 답안을 해당 답란에 작성하지 않은 경우

<논술 1> 다음 제시문을 읽고 문제에 답하시오.

〈가〉 주어진 정수 n에 대하여, $n=de$가 되는 정수 d와 e가 존재할 때 d와 e를 n의 약수라고 부른다. 예를 들어 4의 모든 약수들은 $1, -1, 2, -2, 4, -4$이다.

〈나〉 무리수들로 이루어진 집합의 부분집합 S를 다음과 같이 정의하자.

$$S=\{p+q\sqrt{5} \mid p, q\text{는 유리수이고 } p\text{와 } q \text{ 중 적어도 하나는 } 0\text{이 아니다.}\}$$

집합 S의 원소 α에 대해 다음 세 가지 조건을 만족하는 순서쌍 (a, b, c)를 생각하자.

$a>0$

a, b, c 는 모두 정수이고, 이 세 정수의 공통약수는 1과 -1밖에 없다.

$a\alpha^2+b\alpha+c=0$

이 때 α의 판별식 $D(\alpha)$를 $D(\alpha)=b^2-4ac$로 정의하자.

〈다〉 집합 S의 두 부분집합 T와 R을 각각 다음과 같이 정의하자.

$$T=\{\alpha \in S \mid D(\alpha)=5\}$$

$$R=\{\alpha \in T \mid \alpha>1,\ -1<\alpha'<0\}$$

(위에서 α'은 α의 켤레무리수로서 $\alpha=p+q\sqrt{5}$일 때, $\alpha'=p-q\sqrt{5}$로 정의된다.)

1. 집합 S의 원소 α에 대응하는 순서쌍 (a, b, c)는 유일하게 존재함에 대하여 논하시오.
2. 집합 T의 원소의 개수가 무한함에 대하여 논하시오.
3. 집합 R의 원소의 개수가 유한함에 대하여 논하시오.

뒷면에 계속 ☞

<논술 2> 다음 제시문을 읽고 문제에 답하시오.

<가> 자연수 m, n에 대하여 mn개의 실수를 다음과 같이 m개의 행과 n개의 열로 다음과 같이 나열한 것을 $m \times n$ 행렬이라고 한다.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

여기서 a_{ij}를 행렬 A의 (i,j)성분이라 한다. A를 간단히 $[a_{ij}]_{m \times n}$으로 표시한다.

〈나〉 두 $m \times n$ 행렬 $A = [a_{ij}]_{m \times n}$와 $B = [b_{ij}]_{m \times n}$가 주어졌다고 하자. 만일 모든 i, j $(1 \le i \le m, 1 \le j \le n)$에 대하여 $a_{ij} = b_{ij}$일 때, 두 행렬 A와 B는 같다고 하고 $A = B$로 나타낸다.

〈다〉 $m \times n$ 행렬 $A = [a_{ij}]_{m \times n}$와 $n \times r$ 행렬 $B = [b_{jk}]_{n \times r}$의 곱 AB를 다음과 같이 정의한다.

$$AB = [c_{ik}]_{m \times r}$$

단, $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$ 이다.

k는 2보다 큰 자연수이고,

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix} (n \ge 3), \quad A = \begin{pmatrix} 2k-3 & 1 & 1 \\ 2k-2 & 1 & 0 \\ 2k-2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ 이다.}$$

자연수 $n \ge 2$에 대하여 V_{n+1}은 관계식 $V_{n+1} = A\ V_n$에 의해 주어지고, 관계식

$$(2k-2)\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = (2k-1)^{n-1}$$

이 만족한다고 가정하자.

(1) 자연수 $n \ge 2$에 대하여 $\alpha_n = \gamma_n + \dfrac{1+(-1)^n}{2}$임을 보이시오.

(2) 2보다 큰 모든 자연수 n, k에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$\left| \alpha_n - \frac{(2k-1)^{n-1}}{2k} \right| \le \frac{3}{2k}$$

한양대학교 2013학년도 신입학전형 수시 2차 모의논술고사

자 연 계

출제 의도, 평가내용 및 예시 답안

1. 출제 의도

자연계 논술은 학생들의 수학적 추론 능력과 창의력을 측정하고자 하였다. 그러므로 자연계 논술은 고등학교 수학교과서에 있는 정의들을 기본으로 하여 제시문을 이해하고 이를 바탕으로 창의력을 발휘하여 논리적으로 문제가 요구하는 결론에 도달할 수 있는지를 측정하도록 구성되었다.

2. 문제해설 및 평가내용

<문제 1>

고교 과정에 나오는 두 집합 사이의 일대일 대응, 유한 집합, 무한 집합, 약수와 배수, 이차 방정식의 근과 계수의 관계 등의 개념을 충분히 이해하고 있고, 이들을 유리수와 무리수 등을 다룰 때 잘 적용할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

(1) 문항1 : 이차 방정식을 만족하는 무리수를 이차 방정식의 계수들의 순서쌍에 대응시키는 문제로서, 이 과정에서 근과 계수의 관계, 약수의 개념들을 잘 이해하고 있는지를 평가하는 문제이다.

(2) 문항2 : 문항1의 결과를 사용하여 주어진 집합이 무한 집합인지를 논리적으로 잘 설명하고 있는지를 평가하는 문제이다.

(3) 문항3 : 문항1의 결과와 집합에 주어진 조건을 적용하여 주어진 집합이 유한집합인지를 논리적으로 잘 설명하는지를 평가하는 문제이다.

<문제 2>

다음의 수학적 지식과 수학적 사고능력 및 논리적 전개능력을 평가하기 위한 문제이다.

- 행렬의 연산과 동등에 대하여 이해하는가?
- 행렬로 이루어진 관계식에서 원하는 등식을 찾아낼 수 있는가?
- 주어진 관계식에서 원하는 부등식을 추론할 수 있는가?
- 수학적 추론 능력과 논리적 전개능력이 있는가?

3. 배점 및 예시답안

<문제 1>

문항1. (40점)

답안: (존재성) α를 $p+q\sqrt{5}$라고 놓자. $(\alpha-p)^2=5q^2$이므로 $\alpha^2-2p\alpha+(p^2-5q^2)=0$을 얻는다. 이 때 유리수 $2p$와 p^2-5q^2의 분모들의 최대공약수를 $\alpha^2-2p\alpha+(p^2-5q^2)=0$의 양변에 곱하면 정수 계수 등식을 얻고, 이 정수계수들의 최대공약수로 양변을 나누어 주면 제시문 <나>의 세 조건을 만족하는 순서쌍을 얻게 된다.

(유일성) 순서쌍 (a,b,c)와 (a',b',c')이 각각 제시문 <나>의 세 조건을 만족한다고 하자. 방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 α과 α'임을 착안하면, $(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})=(x-\alpha)(x-\alpha')=(x^2+\frac{b'}{a'}x+\frac{c'}{a'})$을 얻는다. 따라서 $\frac{b}{a}=\frac{b'}{a'}$, $\frac{c}{a}=\frac{c'}{a'}$이 성립하고 이로부터 $b'=\frac{a'}{a}b$, $c'=\frac{a'}{a}c$이 된다. 만약 a'이 a와 같지 않다면 a의 소인수이면서 a'의 소인수가 아닌 소수 p가 존재하게 된다. 그러면 $b'=\frac{a'}{a}b$로부터 b는 p의 배수가 되고, $c'=\frac{a'}{a}c$로부터 c도 p의 배수가 되므로 세 정수 a,b,c의 공통약수가 1과 -1밖에 없다라는 조건에 위배된다. 따라서 $a=a'$이 되어야 하므로, $b'=\frac{a'}{a}b$로부터 $b=b'$, $c'=\frac{a'}{a}c$로부터 $c=c'$을 얻게 된다.

세부기준: 집합 S의 원소에 대응하는 순서쌍이 항상 존재함을 제대로 설명하였는가? (20점) 집합 S의 원소에 대응하는 순서쌍이 유일함을 제대로 설명하였는가? (20점)

문항2. (30점)

답안: 집합 T의 원소 α에 대응하는 순서쌍 (a,b,c)는 $b^2-4ac=5$를 만족한다. 이 때 정수 b는 반드시 홀수이어야 하므로 $b=2k+1$로 두면, $ac=k^2+k-1$이 된다. 이제 $a=1$, $c=k^2+k-1$로 택하자. k는 임의의 정수이므로 무수히 많은 순서쌍 $(a,b,c)=(1,2k+1,k^2+k-1)$에 대응하여 집합 T의 원소를 무수히 많이 얻을 수 있게 된다.

세부기준: 집합 T의 원소 (또는 대응하는 순서쌍)를 제대로 구하였는가? (15점) 집합 T의 원소의 원소의 개수가 무한히 많음을 제대로 설명하였는가? (15점)

문항3. (30점)

답안: 집합 R의 원소 α에 대응하는 순서쌍 (a,b,c)를 생각하자. 주어진 조건으로부터 $\alpha=\frac{-b+\sqrt{5}}{2a}>1$, $-1<\alpha'=\frac{-b-\sqrt{5}}{2a}<0$을 얻는다. 부등식 $-b+\sqrt{5}>2a>b+\sqrt{5}$로부터 b는 반드시 음수이어야 하고, $-b-\sqrt{5}<0$로부터 $0<-b<\sqrt{5}$를 얻는다. 또한 $b^2-4ac=5$이므로 $c=\frac{b^2-5}{4a}$가 되어 가능한 순서쌍의 개수가 유한하므로 집합 R의 원소의 개수도 유한하게 된다.

세부기준: 집합 R의 원소가 만족하여야 할 조건 (또는 부등식)을 제대로 구하였는가? (15점) 이 조건 (또는 부등식)으로부터 집합 R의 원소의 원소의 개수가 유한함을 제대로 설명하였는가? (15점)

<문제 2>

문항1. (50점)

답안: 자연수 $n \geq 2$에 대하여 관계식 $V_{n+1} = A\ V_n$으로부터 다음 관계식을 얻는다.

$$① \text{ -------- } \begin{cases} \alpha_{n+1} = (2k-3)\alpha_n + \beta_n + \gamma_n \\ \beta_{n+1} = \beta_n + (2k-2)\alpha_n \\ \gamma_{n+1} = \gamma_n + (2k-2)\alpha_n \end{cases}$$

위의 식 ①로부터

$$② \text{ -------- } \quad \beta_{n+1} - \gamma_{n+1} = \beta_n - \gamma_n$$

임을 알 수 있다.

그런데, $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 로부터 $\beta_2 = 1, \gamma_2 = 0$임을 알 수 있고, 따라서 $\beta_2 - \gamma_2 = 1$임을 얻는다. 다시 위의 식 ②로부터 $\beta_n = 1 + \gamma_n$ 임을 알 수 있다. 다시, 관계식 ①에서

$$\alpha_{n+1} - \gamma_{n+1} = \beta_n - \alpha_n = 1 + (\gamma_n - \alpha_n)$$

을 얻는다. 식 $\alpha_2 - \gamma_2 = 1$으로부터 관계식

$$\alpha_n = \gamma_n + \frac{1 + (-1)^n}{2}$$

을 유도할 수 있다.

세부기준: 행렬의 관계식으로부터 관계식 ①을 얻었는가? (10점)
관계식 ①로부터 관계식 ②를 이끌어냈는가? (10점)
위에서 찾은 관계식을 활용하여, 문제에서 요구하는 등식을 찾았는가? (30점)

문항2. (50점)

답안: 문항 (1)의 결과로 부터 $|\alpha_n - \gamma_n| \leq 1$과 $|\alpha_n - \beta_n| \leq 2$을 얻는다.

가정에서 주어진 식 $(2k-2)\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = (2k-1)^{n-1}$으로부터, 다음 부등식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \left|2k\alpha_n - (2k-1)^{n-1}\right| &\leq \left|(2k-2)\alpha_n + \beta_n + \gamma_n - (2k-1)^{n-1}\right| + |\alpha_n - \beta_n| + |\alpha_n - \gamma_n| \\ &\leq 3 \end{aligned}$$

위의 부등식에서 양변을 $2k$로 나누면, $\left|\alpha_n - \frac{(2k-1)^{n-1}}{2k}\right| \leq \frac{3}{2k}$이 성립한다.

세부기준: 문항 (1)의 결과로 부터 $|\alpha_n - \gamma_n| \leq 1$과 $|\alpha_n - \beta_n| \leq 2$을 얻었는가? (20점)
가정에서 주어진 식으로부터 원하는 부등식을 찾았는가? (30점)