2013학년도 8월 고등학교 1학년 학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 •

정 답

1	①	*2*	①	*3*	④	*4*	②	*5*	①
6	②	*7*	③	*8*	⑤	*9*	③	*10*	⑤
11	②	*12*	④	*13*	①	*14*	⑤	*15*	④
16	③	*17*	②	*18*	③	*19*	④	*20*	⑤
21	②	*22*	90	*23*	10	*24*	31	*25*	27
26	4	*27*	54	*28*	180	*29*	15	*30*	225

해 설

1. [출제의도] 음수의 제곱근 계산하기

$\sqrt{-2}\times\sqrt{-8}=\sqrt{2}i\times\sqrt{8}i=4i^2=-4$

2. [출제의도] 이중근호 계산하기

$\sqrt{7-2\sqrt{12}}=2-\sqrt{3}$

$a=2,\ b=-1$

$\therefore\ a+b=1$

3. [출제의도] 명제의 역, 이, 대우 이해하기

명제가 참일 때 그 대우도 반드시 참이다.

명제 $p\to\sim q$의 대우는 명제 $q\to\sim p$이다.

4. [출제의도] 드모르간 법칙을 이용하여 집합 연산하기

$A\cap(A^C\cup B^C)=A\cap(A\cap B)^C=A-(A\cap B)$

$\therefore\ \{1,5\}$

5. [출제의도] 조건의 진리집합을 이용한 명제의 참, 거짓 이해하기

명제 $p\to q$가 거짓임을 보이기 위한 원소는

진리집합 P에 속하고 진리집합 Q에 속하지 않는다.

$1\in P,\ 1\notin Q$

6. [출제의도] 산술평균과 기하평균의 대소관계를 이용하여 주어진 식의 최솟값 계산하기

0이 아닌 실수 x에 대하여 $x^2>0$이므로

$9x^2+\frac{1}{x^2}\geq 2\sqrt{9x^2\times\frac{1}{x^2}}=6$

등호가 성립할 경우는 $9x^2=\frac{1}{x^2}$이다.

따라서 $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$일 때 최솟값 6을 가진다.

7. [출제의도] 음수의 제곱근의 성질 이해하기

0이 아닌 두 실수 a, b에 대하여

$\sqrt{\frac{a}{b}}=-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$이므로 $a>0,\ b<0$이다.

$|a-b|+\sqrt{(-a+b-3)^2}=(a-b)-(-a+b-3)$

$=2a-2b+3$

8. [출제의도] 유리식을 변형하여 식 계산하기

주어진 식의 좌변을 변형하면

$\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)+\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+5}\right)$

$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+5}$

분모를 0으로 만들지 않는 모든 실수 x에 대하여

$\frac{5}{x^2+5x}=\frac{a}{x^2+bx}$이므로 $a=5,\ b=5$이다.

$\therefore\ a+b=10$

9. [출제의도] 다항식의 최대공약수 이해하기

$A(x)=x^3+x^2+x-3=(x-1)(x^2+2x+3)$

$B(x)=x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$이므로

두 다항식의 최대공약수 중 최고차항의 계수가 1인 최대공약수 $G(x)$는 $G(x)=x-1$이다.

고1 정답 및 해설

$\therefore\ G(10)=9$

10. [출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 주어진 식의 값 계산하기

$A(x)-xB(x)=0,\ 5x^2-2x-3=0$

의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha+\beta=\frac{2}{5}, \alpha\beta=-\frac{3}{5}$ 이다.

$\therefore\ 25(\alpha^2+\beta^2)=25\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}=34$

11. [출제의도] 조건의 진리집합을 이용하여 필요조건 이해하기

a가 양수이므로 조건 p의 진리집합 P는

$P=\{x \mid x<1-a$ 또는 $x>1+a\}$

p가 q이기 위한 필요조건이므로 조건 q의

진리집합 Q에 대하여 $Q\subset P$이다.

따라서 $a\le 1-a$이므로 a의 범위는 $0<a\le\frac{1}{2}$ 이다.

12. [출제의도] 다항식의 연산을 이용한 수학내적문제 해결하기

$p(x)=f(x)+g(x)=5x^2-7x-6$

$q(x)=2f(x)-3g(x)=5x^2+x-22$

$p(x)=q(x)$ 이므로 $x=2$

$\therefore\ 10\alpha=20$

13. [출제의도] 실수 전체의 집합에서 실수의 덧셈에 대한 역원을 이용한 수학외적문제 해결하기

[그림 (나)]에는 길이가 7인 선분 2개, 길이가 4인 선분 2개, 길이가 $\sqrt{2}$ 인 선분 8개가 있다.

따라서 모든 선분의 길이의 합 a는

$a=22+8\sqrt{2}$ 이므로 실수 전체의 집합에서 a의 덧셈에 대한 역원은 $-22-8\sqrt{2}$ 이다.

14. [출제의도] 비례식의 성질 이해하기

$\frac{x+y}{6}=\frac{y+z}{8}=\frac{z+x}{10}=\frac{3x+2y-z}{a}=k\ (k\neq 0)$

로 놓으면

$x+y=6k,\ y+z=8k,\ z+x=10k$ ……①

$3x+2y-z=ak$ ……②

①에서 $x=4k, y=2k, z=6k$이고

이것을 ②에 대입하면 $12k+4k-6k=ak$

$\therefore\ a=10$

15. [출제의도] 다항식의 연산을 이용하여 수에 관한 명제 증명하기

$(가)=f(n)=5n+2,\ (나)=g(n)=-2n$

$\therefore\ f(4)+g(5)=22-10=12$

16. [출제의도] 복잡한 다항식의 인수분해 이해하기

주어진 식을 y에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해하면

$3(x+1)y^2+4x(x+1)y+x^2(x+1)$

$=(x+1)(3y^2+4xy+x^2)$

$=(x+1)(x+3y)(x+y)$

17. [출제의도] 두 복소수가 같다는 조건을 이용한 수학내적문제 해결하기

$z_1=2+3i,\ z_2=a+bi$ 일 때

$z_1z_2=(2a-3b)+(3a+2b)i$

$az_1+3iz_2=(2a-3b)+6ai$ 이다.

$z_1z_2=az_1+3iz_2$를 만족하므로 $2b=3a$이다.

$a^2+4b=a^2+6a=(a+3)^2-9$이므로 $a=-3$일 때,

최솟값은 -9이다.

18. [출제의도] 복소수의 성질 이해하기

$z^2<0$이면 z의 실수부분이 0이고 허수부분은 0이 아니다.

$n^2-10n+9=(n-1)(n-9)=0$에서

$n=1$ 또는 $n=9$

$n^2-4n+3=(n-1)(n-3)\neq 0$에서

$n\neq 1$ 이고 $n\neq 3$

따라서 $n=9$이므로 9를 7로 나눈 나머지는 2이다.

19. [출제의도] 실수의 성질을 이용하여 주어진 식의 값 추론하기

0이 아닌 실수 k에 대하여

$\frac{k}{\sqrt{k^2}}=\frac{k}{|k|}=\begin{cases}1 & (k>0)\\ -1 & (k<0)\end{cases}$

집합 A의 원소 x는

$x=\frac{a}{\sqrt{a^2}}+\frac{b}{\sqrt{b^2}}+\frac{c}{\sqrt{c^2}}=\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}$

a	b	c	$\frac{a}{\lvert a\rvert}+\frac{b}{\lvert b\rvert}+\frac{c}{\lvert c\rvert}$
+	+	+	3
+	+	−	1
+	−	+	1
−	+	+	1
+	−	−	−1
−	+	−	−1
−	−	+	−1
−	−	−	−3

이므로 $A=\{-3, -1, 1, 3\}$이다.

따라서 집합 A의 원소의 개수는 4이다.

20. [출제의도] 실수의 성질을 이용한 추론하기

ㄱ. $ab+1-(a+b)=(a-1)(b-1)>0$ (참)

ㄴ. $abc+1-(a+bc)=a(bc-1)-(bc-1)$

$=(a-1)(bc-1)>0$ (참)

ㄷ. ㄴ에 의하여

$(abc+1)+1>(a+bc)+1$

$(a+bc)+1-(a+b+c)=bc+1-b-c$

$=(b-1)(c-1)>0$ (참)

21. [출제의도] 수의 성질 추론하기

ㄱ. 을과 병은 속력이 같으므로 을이 350m 이동하는 동안 병도 350m 이동한다. 이때 을과 병은 C지점에서 만난다. (거짓)

ㄴ. 을과 병이 A지점에서 만날 때 출발 후 이동한 거리는 을은 $140a$, 병은 $100b$(a, b는 자연수)이다. 을과 병의 속력이 같으므로 만날 때까지의 시간을 t라 하면 $\frac{140a}{t}=\frac{100b}{t}$, $a=\frac{5}{7}b$이다.

a, b는 자연수이므로

b는 7의 배수, a는 5의 배수이다.

을과 병이 출발 후 처음으로 A지점에서 다시 만날 때까지 을이 이동한 거리는 $140\times 5=700$이다. (참)

ㄷ. 갑과 병이 A지점에서 만난다고 가정하면

갑과 병이 출발 후 이동한 거리는

각각 $50\pi a, 100b$(a, b는 자연수)이다.

갑과 병의 속력이 같으므로 만날 때까지의 시간을 t라 하면 $\frac{50\pi a}{t}=\frac{100b}{t}$, $\frac{b}{a}=\frac{\pi}{2}$ 인 두 자연수 a, b가 존재하지 않으므로 모순이다. (거짓)

22. [출제의도] 켤레복소수를 이용하여 복소수가 같을 조건 이해하기

$x+yi=\overline{9-10i}$

$x+yi=9+10i$

$x=9,\ y=10$

$\therefore\ xy=90$

23. [출제의도] 이차방정식의 판별식 이해하기

이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 판별식 D가 $D>0$이다.

이차방정식 $x^2+2kx+k^2+2k-10=0$에서

$\frac{D}{4}=k^2-(k^2+2k-10)>0$이다.

따라서 $k<5$이므로 모든 자연수 k의 합은 10이다.

24. [출제의도] 조건을 만족시키는 집합의 수학내적 문제 해결하기

전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 부분집합의 개수는 2^5이다. 그 중 원소의 개수가 1미만인 것은 $\varnothing$뿐이므로 $2^5-1=31$이다.

25. [출제의도] 실수의 성질 이해하기

세 실수 x, y, z가 등식

$(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)^2+(x-y-z+3)^2=0$

을 만족시키려면

$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=0,\ x-y-z+3=0$이다.

$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$

$=\frac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}$

이므로 $x=y=z$이다.

$x-y-z+3=-x+3=0$

$x=y=z=3$

$\therefore\ xyz=27$

26. [출제의도] 나머지정리를 이용한 수학내적문제 해결하기

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차다항식이므로 인수정리에 의해 $f(x)=(x+2)(x-3)(x-a)$로 둘 수 있다. 나머지정리에 의해 $f(2)=8$이므로

$4\times(-1)\times(2-a)=8$이다.

$\therefore\ a=4$

27. [출제의도] 연립부등식을 이용한 수학내적문제 해결하기

$0\le x\le 4$를 만족하는 모든 실수 x에 대하여

$4x-9$의 범위는 $-9\le 4x-9\le 7$이다.

따라서 $3t-2t^2\le -9,\ 23-t^2\ge 7$을 만족하는

실수 t의 범위는 $-4\le t\le -\frac{3}{2}$ 또는 $3\le t\le 4$이다.

만족하는 정수 t는 $-4, -3, -2, 3, 4$이므로

모든 정수 t의 제곱의 합은 54이다.

28. [출제의도] 집합의 포함관계를 이용한 수학외적 문제 해결하기

학생 전체의 집합을 U, 국어 과목을 신청한 학생의 집합을 A, 수학 과목을 신청한 학생의 집합을 B, 영어 과목을 신청한 학생의 집합을 C라 하자.

어느 과목의 방과후수업도 신청하지 않은 학생 수가 최대가 되려면 두 개의 과목의 방과후수업을 동시에 신청한 학생 수가 최대가 되어야 한다.

즉, $n\{(A\cap B)-(A\cap B\cap C)\}=40$,

$n\{(B\cap C)-(A\cap B\cap C)\}=40$,

$n\{(C\cap A)-(A\cap B\cap C)\}=40$이다.

따라서 어느 과목의 방과후수업도 신청하지 않은 학생 수의 최댓값은

$n\{U-(A\cup B\cup C)\}=300-(40+40+40+30)=150$

어느 과목의 방과후수업도 신청하지 않은 학생 수가 최소가 되려면 두 개의 과목의 방과후수업을 동시에 신청한 학생 수가 최소가 되어야 한다.

즉, $n\{A-(B\cup C)\}=80$,

$n\{B-(C\cup A)\}=80$, $n\{C-(A\cup B)\}=80$이다.

따라서 어느 과목의 방과후수업도 신청하지 않은 학생 수의 최솟값은

$n\{U-(A\cup B\cup C)\}=300-(80+80+80+30)=30$

$\therefore\ 150+30=180$

29. [출제의도] 두 집합이 서로 같음을 이용한 수학내적문제 해결하기

두 집합이 서로 같으면 각 집합의 모든 원소의 합이 서로 같다.

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{5}{xyz}$ 이므로

$x+y+z=\frac{5}{xyz}$ ……①

두 집합이 서로 같으면 각 집합의 모든 원소의 곱이 서로 같다.

카페 학생이 우선이다(http://cafe.naver.com/3sbios, http://cafe.daum.net/3sbios)는 교육자료 공유문화의 개방화와 선진화를 위해 열과 성을 다하고 있습니다.

$xyz=\dfrac{1}{xyz}$ ……②

①, ②에서

$\begin{cases} xyz=1 \\ x+y+z=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} xyz=-1 \\ x+y+z=-5 \end{cases}$

$\therefore\ x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=15$

30. [출제의도] 연립방정식을 이용한 수학외적문제 해결하기

직사각형 모양의 밭의 짧은 변의 길이를 x, 긴 변의 길이를 y, 길의 폭을 z라 할 때

연립방정식 $\begin{cases} x+y+3z=21 \\ y+2z=17 \\ y=4x+3z \end{cases}$ 을 풀면

$x=3$, $y=15$, $z=1$이다.

따라서 직사각형 모양의 밭 하나의 넓이는

$3\times 15=45(\mathrm{m}^2)$이다.

$\therefore\ S=45\times 5=225$