수리 영역_가형

1. ④	2. ⑤	3. ⑤	4. ②	5. ③
6. ①	7. ②	8. ①	9. ③	10. ①
11. ④	12. ②	13. ①	14. ⑤	15. ③
16. ①	17. ④	18. 28	19. 10	20. 11
21. 9	22. 5	23. 90	24. 12	25. 19
[미분과 적분]				
26. ⑤	27. ④	28. ⑤	29. ③	30. 20
[확률과 통계]				
26. ②	27. ③	28. ②	29. ⑤	30. 154
[이산수학]				
26. ②	27. ⑤	28. ②	29. ③	30. 455

1. 지수와 로그 정답 ④

$$2^{\log_2 4} \times 8^{\frac{2}{3}} = 4^{\log_2 2} \times (2^3)^{\frac{2}{3}}$$
$$= 4 \times 2^2$$
$$= 16$$

2. 행렬 정답 ⑤

$$A = 2B + \begin{pmatrix} -7 & -2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= 2\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 & -2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 & -2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$-3+(-4)+0+2=-5$ 이다.

3. 함수의 극한과 연속성 정답 ⑤

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2+x-1}{\sqrt{x+8}-3}$$
$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x^3-x^2+x-1)(\sqrt{x+8}+3)}{(\sqrt{x+8}-3)(\sqrt{x+8}+3)}$$
$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+1)(\sqrt{x+8}+3)}{(x+8)-9}$$
$$= \lim_{x\to 1}\{(x^2+1)(\sqrt{x+8}+3)\}$$
$$= 2\times 6$$
$$= 12$$

4. 다항함수의 미분법 정답 ②

$f(x)=x^2$에서 $f'(x)=2x$이므로 점 $(-2,\ 4)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-2)=-4$이다.

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-4=-4(x+2)$

즉, $y=-4x-4$

그런데, 이 접선이 곡선 $y=x^3+ax-2$에 접하므로

$g(x)=x^3+ax-2$에서 $g'(x)=3x^2+a$ …… ㉠

접점의 좌표를 $(t,\ t^3+at-2)$라고 하면

접선의 기울기는 $-4=\dfrac{(t^3+at-2)-4}{t+2}$ …… ㉡

또, ㉠에 의해 $g'(t)=3t^2+a=-4$ …… ㉢

이제 ㉡, ㉢을 연립해서 풀면

$$\begin{cases} t^3+at-6=-4t-8 \\ a=-3t^2-4 \end{cases} \quad \therefore\ t=1,\ a=-7$$

따라서 $a=-7$이다.

5. 확률분포와 통계적 추정 정답 ③

일주일 동안 운동하는 시간을 확률변수 X라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(65,\ 15^2)$을 따른다.

크기가 25인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면

$$\mathrm{E}(\overline{X})=65,\quad \mathrm{V}(\overline{X})\ \frac{15^2}{25}=9$$

이므로 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(65,\ 3^2)$을 따른다.

$$\therefore\ \mathrm{P}(\overline{X}\geq 68) = \mathrm{P}\left(Z\geq\frac{68-65}{3}\right)$$
$$= \mathrm{P}(Z\geq 1)$$
$$= 0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1)$$
$$= 0.1587$$

6. 다항함수의 미분법 정답 ①

함수 $y=f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로 $f(-x)=f(x)$이고, $f'(-x)=-f'(x)$이다.

$$\lim_{x\to -2}\frac{f(x^2)-f(4)}{f(x)-f(-2)}$$
$$=\lim_{x\to -2}\left\{\frac{x-(-2)}{f(x)-f(-2)}\cdot\frac{f(x^2)-f(4)}{x^2-4}\cdot(x-2)\right\}$$
$$=\lim_{x\to -2}\frac{x-(-2)}{f(x)-f(-2)}\cdot\lim_{x\to -2}\frac{f(x^2)-f(4)}{x^2-4}\cdot\lim_{x\to -2}(x-2)$$
$$=\frac{1}{\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}}\cdot\lim_{t\to 4}\frac{f(t)-f(4)}{t-4}\cdot(-4)\}$$
$$=\frac{1}{f'(-2)}\cdot f'(4)\cdot(-4)$$
$$=\frac{1}{3}\times 6\times(-4)$$
$$=-8$$

7. 방정식과 부등식 정답 ②

방정식의 양변에 $(x-1)(x-2)$를 곱하여 정리하면

$(x^2+x+1)(x-1)-(x+2)(x-2)$

$=3-2(x-1)(x-2)$

$x^3+x^2-6x+4=0$

$(x-1)(x^2+2x-4)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x^2+2x-4=0$

그런데, $x=1$은 주어진 방정식의 분모를 0이 되게 하므로 무연근이다.
따라서, 모든 실근의 합은 근과 계수의 관계에 의해 -2이다.

8. 수열 정답 ①

$a_n=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$에서

$a_1=(-1)^{\frac{2}{2}}=-1$

$a_2=(-1)^{\frac{2(2+1)}{2}}=-1$

$a_3=(-1)^{\frac{3(3+1)}{2}}=1$

$a_4=(-1)^{\frac{4(4+1)}{2}}=1$

$a_5=(-1)^{\frac{5(5+1)}{2}}=-1$

$\vdots$

이므로 수열 $\{a_n\}$은 $-1,\ -1,\ 1,\ 1$이 반복적으로 나오는 수열이다.

$\therefore\ \sum_{n=1}^{2010} na_n$

$=(-1-2+3+4)+(-5-6+7+8)+\cdots+(-2005-2006+2007+2008)-2009-2010$

$=4+4+\cdots+4-2009-2010$

$=4\times 502-2009-2010$

$=-2011$

9. 방정식과 부등식 정답 ③

$X=2x$라 두고 주어진 부등식을 정리하면

$$\frac{\frac{X}{2}}{f(X)-1}\geq\frac{1}{2}$$
$$\frac{X}{f(X)-1}-1\geq 0$$
$$\frac{X+1-f(X)}{f(X)-1}\geq 0$$

(ⅰ) $f(X)>1$인 경우

$X+1-f(X)\geq 0$이므로

$X+1\geq f(X)$

그림에 의해 $1\leq X\leq 3$

$\therefore\ \frac{1}{2}\leq x\leq\frac{3}{2}$

(ⅱ) $f(X)<1$인 경우

$X+1-f(X)\leq 0$이므로

$X+1\leq f(X)$

또한 $f(a)=1$이라 하면

그림에 의해 $-2\leq X<a$

$\therefore\ -1\leq x<\frac{a}{2}$

따라서, (ⅰ), (ⅱ)에 의해 주어진 부등식을 만족시키는 실수 x의 최댓값은 $M=\frac{3}{2}$, 최솟값은 $m=-1$이다.

10. 함수의 극한과 연속성 정답 ①

ㄱ. (거짓)

$$\lim_{x\to1+0}h(x)=\lim_{x\to1+0}\frac{f(x)-|f(x)|}{2}$$
$$=\lim_{x\to1+0}\frac{f(x)-\{-f(x)\}}{2}$$
$$=\lim_{x\to1+0}f(x)$$
$$=1$$

$$\lim_{x\to1-0}h(x)=\lim_{x\to1-0}\frac{f(x)-|f(x)|}{2}$$
$$=\lim_{x\to1-0}\frac{f(x)-\{-f(x)\}}{2}$$
$$=\lim_{x\to1-0}f(x)$$
$$=-1$$

$\lim_{x\to1+0}h(x)=1\neq-1=\lim_{x\to1-0}h(x)$이므로

$\lim_{x\to1}h(x)$는 존재하지 않는다.

ㄴ. (참)

$(h\circ g)(x)$

$=h(g(x))$

$=\dfrac{g(x)-|g(x)|}{2}$

$=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{f(x)+|f(x)|}{2}-\left|\dfrac{f(x)+|f(x)|}{2}\right|\right\}$

(i) $f(x)\geqq0$

$(h\circ g)(x)$

$=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{f(x)+f(x)}{2}-\left|\dfrac{f(x)+f(x)}{2}\right|\right\}$

$=\dfrac{1}{2}\{f(x)-f(x)\}$

$=0$

(ii) $f(x)<0$

$(h\circ g)(x)$

$=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{f(x)-f(x)}{2}-\left|\dfrac{f(x)-f(x)}{2}\right|\right\}$

$=0$

(i), (ii)에 의해 함수 $(h\circ g)(x)=0$이므로 폐구간 $[-1,\ 2]$에서 연속이다.

ㄷ. (거짓)

두 함수 $y=g(x)$, $y=h(x)$가

(i) $f(x)\geqq0$일 때

$$g(x)=\frac{f(x)+f(x)}{2}=f(x)$$

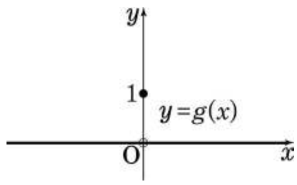
$$h(x)=\frac{f(x)-f(x)}{2}=0$$

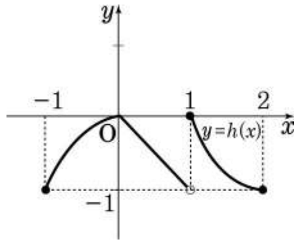
(ii) $f(x)<0$일 때

$$g(x)=\frac{f(x)-f(x)}{2}=0$$

$$h(x)=\frac{f(x)+f(x)}{2}=f(x)$$

이므로 $y=g(x)$와 $y=h(x)$의 그래프는 다음과 같다.





$\therefore\ \lim_{x\to0}(g\circ h)(x)=\lim_{x\to0}g(h(x))$
$=\lim_{x\to0}g(x)$
$=0$

$(g\circ h)(0)=g(0)=1$

$\lim_{x\to0}(g\circ h)(x)\neq(g\circ h)(0)$이므로

$(g\circ h)(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

11. 지수와 로그 정답 ④

두 지점 A, B에서 측정한 수신 전력이 각각 -25, -5이므로 주어진 식에 대입하면

$$-25=P-20\log\left(\frac{4\pi fR_A}{c}\right)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\ ㉠$$

$$-5=P-20\log\left(\frac{4\pi fR_B}{c}\right)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\ ㉡$$

㉠−㉡을 하면

$$-20=-20\log\left(\frac{4\pi fR_A}{c}\right)+20\log\left(\frac{4\pi fR_B}{c}\right)$$

$$1=\log\left(\frac{4\pi fR_A}{c}\right)-\log\left(\frac{4\pi fR_B}{c}\right)$$

$$1=\log\left(\frac{\frac{4\pi fR_A}{c}}{\frac{4\pi fR_B}{c}}\right)$$

VisangEDU 비상에듀

$$1=\log\frac{R_A}{R_B}$$

$$\therefore\ \frac{R_A}{R_B}=10$$

12. 수열의 극한 정답 ②

R_1에서 색칠된 부분의 넓이는 반지름의 길이가 $6\times\frac{1}{3}=2$인 원의 넓이에서 반지름의 길이가 1인 원의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$\pi\cdot2^2-\pi\cdot1^2=3\pi$

R_2에서 새로 색칠된 부분의 오른쪽 원에서 색칠된 부분은 반지름의 길이가 $2\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$인 원의 넓이에서 반지름의 길이가 $2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$인 원의 넓이를 뺀 것과 같고, 같은 모양이 왼쪽에도 있으므로

$$2\times\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^2\pi-\left(\frac{1}{3}\right)^2\pi\right\}=2\times\frac{3}{9}\pi=3\pi\left(\frac{2}{9}\right)$$

같은 방법으로 R_3에서 새로 색칠된 부분의 넓이를 구하면

$$4\times\left\{\left(\frac{2}{9}\right)^2\pi-\left(\frac{1}{9}\right)^2\pi\right\}=4\times\frac{3}{81}\pi=3\pi\left(\frac{2}{9}\right)^2$$

따라서 S_n의 넓이는 첫째항이 3π이고, 공비가 $\frac{2}{9}$인 무한등비수열의 합이므로

$$S_n=3\pi+3\pi\left(\frac{2}{9}\right)+3\pi\left(\frac{2}{9}\right)^2+\cdots$$

$$=\frac{3\pi}{1-\frac{2}{9}}$$

$$=\frac{27\pi}{7}$$

13. 확률분포와 통계적 추정 정답 ①

(ⅰ) 추가된 부품이 모두 S인 경우

부품 S와 부품 T는 각각 5개, 2개이고 추가된 부품 중 S의 개수는 이항분포 $B\left(2,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로 7개의 부품 중 임의로 1개를 선택한 것이 T일 확률은

$$\left\{{}_2C_2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}\times\frac{2}{7}=\frac{1}{14}$$

(ⅱ) 추가된 부품이 S, T 각각 1개인 경우

부품 S와 부품 T는 각각 4개, 3개이고 추가된 부품 중 S의 개수는 이항분포 $B\left(2,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로 7개의 부품 중 임의로 1개를 선택한 것이 T일 확률은

$$\left\{{}_2C_2\times\left(\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}\times\frac{3}{7}=\frac{3}{14}$$

(ⅲ) 추가된 부품이 모두 T인 경우

부품 S와 부품 T는 각각 3개, 4개이고 추가된 부품 중 S의 개수는 이항분포 $B\left(2,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로 7개의 부품 중 임의로 1개를 선택한 것이 T일 확률은

$$\left\{{}_2C_0\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}\times\frac{4}{7}=\frac{2}{14}$$

따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의해 구하는 확률은

$$\frac{\frac{1}{14}}{\frac{1}{14}+\frac{3}{14}+\frac{2}{14}}=\frac{1}{6}\text{ 이다.}$$

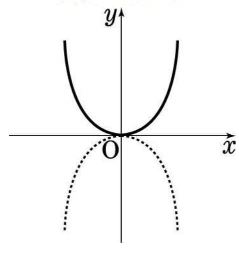
14. 다항함수의 미분법 정답 ⑤

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 가지므로 표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−

ㄱ. (거짓)

[반례] $f(x)=-x^2$인 경우 $x=0$에서 극댓값을 갖지만, 함수 $|f(x)|=|-x^2|=x^2$은 $x=0$에서 극솟값을 갖는다.



ㄴ. (참)

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 가지므로 $x>0$에서 감소하고, 함수 $f(|x|)$는 y축 대칭이므로 $f(|x|)$는 $x<0$에서 증가, $x>0$에서 감소한다. 따라서 $f(|x|)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

ㄷ. (참)

$g(x)=f(x)-x^2\cdot|x|$이라 두면

(ⅰ) $x\geq0$일 때 $g(x)=f(x)-x^3$이므로

$g'(x)=f'(x)-3x^2$

$x=0$이면 $g'(0)=0(\because f'(0)=0)$

$x>0$이면 $g'(x)<0(\because f'(x)<0)$

(ii) $x<0$일 때 $g(x)=f(x)+x^3$이므로

$g'(x)=f'(x)+3x^2>0(\because f'(x)>0)$

그러므로 (i), (ii)에 의해 함수 $g(x)=f(x)-x^2\cdot|x|$은 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

15. 순열과 조합 **정답 ③**

등식 $(1+x)^{2n-1}=(1+x)^{n-1}(1+x)^n$의 좌변에서 x^{n-1}의 계수는 $\boxed{{}_{2n-1}C_{n-1}}$이고, (*)을 이용하여 우변에서 x^{n-1}의 계수를 구하면

$$\sum_{k=1}^{n}\left({}_{n-1}C_{k-1}\times \boxed{{}_{n}C_{n-k}}\right)$$

이다. 따라서

$$\boxed{{}_{2n-1}C_{n-1}}=\sum_{k=1}^{n}\left({}_{n-1}C_{k-1}\times \boxed{{}_{n}C_{n-k}}\right)$$

이다.

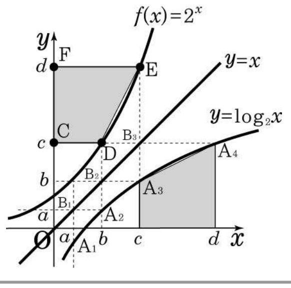
한편 $1\le k\le n$일 때,

$k\times {}_{n}C_{k}=n\times {}_{n-1}C_{k-1}$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k({}_{n}C_{k})^2&=\sum_{k=1}^{n}(n\times {}_{n-1}C_{k-1}\times {}_{n}C_{k})\\&=\sum_{k=1}^{n}\left(n\times {}_{n-1}C_{k-1}\times \boxed{{}_{n}C_{n-k}}\right)\\&=n\times\sum_{k=1}^{n}\left({}_{n-1}C_{k-1}\times \boxed{{}_{n}C_{n-k}}\right)\\&=n\times {}_{2n-1}C_{n-1}\\&=n\times\frac{(2n-1)!}{(n-1)!\,n!}\\&=n\times\frac{2n\cdot(2n-1)!}{2n\cdot(n-1)!\,n!}\\&=\frac{n}{2}\times\frac{(2n)!}{n!\,n!}\\&=\boxed{\frac{n}{2}\times {}_{2n}C_{n}}\end{aligned}$$

16. 지수함수와 로그함수 **정답 ①**

함수 $f(x)=2^x$은 함수 $y=\log_2 x$의 역함수이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 오른쪽 그래프에서 주어진 사각형의 넓이는 □CDEF의 넓이와 같다.



∴ □CDEF

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{2}(\overline{CD}+\overline{EF})\times\overline{CF}\\&=\frac{1}{2}(b+c)(d-c)\\&=\frac{1}{2}\{f(a)+f(b)\}\{f(c)-f(b)\}\\&=\frac{1}{2}\{f(a)+f(b)\}\{(f\circ f)(b)-(f\circ f)(a)\}\end{aligned}$$

17. 행렬 **정답 ④**

ㄱ. (거짓)

[반례] $\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}$이므로

홀수인 성분이 있다.

ㄴ. (참)

$\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}3&3\\3&3\end{pmatrix}$이므로

$3\left\{\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\right\}$

$=\begin{pmatrix}9&9\\9&9\end{pmatrix}$

즉, $A_1+A_2+\cdots+A_m=\begin{pmatrix}9&9\\9&9\end{pmatrix}$를 만족하는 m의 값은 12이다.

ㄷ. (참)

행렬 $\begin{pmatrix}1&3\\5&7\end{pmatrix}$의 모든 성분이 홀수이므로

$A_1+A_2+\cdots+A_n$의 모든 성분도 홀수이어야 한다.

이때, $\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}3&3\\3&3\end{pmatrix}$이므로 n의 최솟값은 4이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

18. 다항함수의 미분법 **정답 28**

$f(x)=(2x^3+1)(x-1)^2$이므로

$f'(x)=6x^2(x-1)^2+2(x-1)(2x^3+1)$

VisangEDU 비상에듀

$\therefore\ f'(-1)$

$=6\times(-1)^2\times(-2)^2+2\times(-2)\times(-1)$

$=24+4$

$=28$

19. 함수의 극한과 연속성 정답 10

$\lim_{x\to+0}\dfrac{x^3f\left(\frac{1}{x}\right)-1}{x^3+x}=5$에서 $x\to+0$일 때

(분모) → 0이므로 (분자) → 0이다.

따라서 $f(x)$는 삼차함수이면서 삼차항의 계수는 1이다.

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$라 놓으면

$$\lim_{x\to+0}\frac{x^3f\left(\frac{1}{x}\right)-1}{x^3+x}=\lim_{x\to+0}\frac{ax+bx^2+cx^3}{x^3+x}$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{cx^2+bx+a}{x^2+1}$$

$$=a=5$$

또한 $\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x^2+x-2}=\dfrac{1}{3}$에서 $x\to1$일 때

(분모) → 0이므로 (분자) → 0이다.

따라서 $f(1)=0$이므로 $1+5+b+c=0$에서

$c=-b-6$이다.

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2+x-2}=\lim_{x\to1}\frac{x^3+5x^2+bx-(b+6)}{x^2+x-2}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\{x^2+6x+(b+6)\}}{(x-1)(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x^2+6x+(b+6)}{x+2}$$

$$=\frac{b+13}{3}=\frac{1}{3}$$

$\therefore\ b=-12$

$\therefore\ c=12-6=6$

$\therefore\ f(x)=x^3+5x^2-12x+6$

$\therefore\ f(2)=8+20-24+6=10$

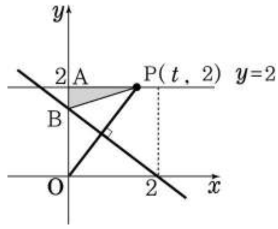
20. 다항함수의 미분법 정답 11

직선 OP의 기울기가 $\dfrac{2}{t}$이므로 선분 OP의 수직이등분선은 기울기가 $-\dfrac{t}{2}$이고 점 $\left(\dfrac{t}{2},\ 1\right)$을 갖는다.

$$\therefore\ y=-\frac{t}{2}\left(x-\frac{t}{2}\right)+1$$

$$=-\frac{t}{2}x+\frac{t^2}{4}+1$$

따라서 점 B의 좌표는 $\left(0,\ \dfrac{t^2}{4}+1\right)$이므로



$$f(t)=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AP}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{t^2}{4}\right)\cdot t$$

$$=-\frac{t^3}{8}+\frac{t}{2}$$

$f'(t)=-\dfrac{3}{8}t^2+\dfrac{1}{2}=0$에서

$\dfrac{3}{8}t^2=\dfrac{1}{2}$이므로 $t^2=\dfrac{4}{3}$

$\therefore\ t=\pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	2
$f'(t)$	+	+	0	−	−
$f(t)$	↗	↗	극대 (최대)	↘	↘

따라서 $f(t)$의 최댓값은 $t=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$일 때

$-\dfrac{1}{8}\times\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^3+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2\sqrt{3}}{3}=\dfrac{2}{9}\sqrt{3}$이므로

$a+b=9+2=11$이다.

21. 방정식과 부등식 정답 9

$\sqrt{4n+x}+\sqrt{4n-x}=2n$에서

$\sqrt{4n+x}=2n-\sqrt{4n-x}$

양변을 제곱하면

$4n+x=4n^2-4n\sqrt{4n-x}+4n-x$

$4n\sqrt{4n-x}=4n^2-2x$

$2n\sqrt{4n-x}=2n^2-x$

또 양변을 제곱하여 정리하면

$x^2+(4n^4-16n^3)=0$

주어진 무리방정식이 실수해를 가지려면

$4n^4-16n^3\leq0$이어야 한다.

$\therefore\ 4n^3(n-4)\leq0$

$\therefore\ n-4\leq0$($\because$ n은 자연수)

∴ $n=1,\ 2,\ 3,\ 4$

$n=1$ 이면 $x=\pm2\sqrt{3}$이지만 주어진 방정식이 성립하지 않는다.

따라서 구하는 모든 n의 값의 합은

$2+3+4=9$ 이다.

22. 수열 정답 5

$a_m+a_{m+1}+\cdots+a_{15}<0$에서

$f(15)=a_1+a_2+\cdots+a_{15}$,

$f(m-1)=a_1+a_2+\cdots+a_{m-1}$

이므로 $f(15)-f(m-1)<0$

∴ $f(15)<f(m-1)$

그림에서 $3<m-1<15$이므로

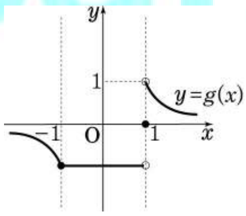
$4<m<15$(∵ m이 15보다 작은 자연수)

따라서 구하는 m의 최솟값은 5이다.

23. 함수의 극한과 연속성 정답 90

$f(x)=x^2+ax+b$라 놓으면

(ⅰ) $g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & (x>1)\\ 0 & (x=1)\\ -1 & (-1\leqq x<1)\\ \dfrac{1}{x} & (x<-1)\end{cases}$



$$f(x)g(x)=\begin{cases}x+a+\dfrac{b}{x} & (x>1)\\ 0 & (x=1)\\ -x^2-ax-b & (-1\leqq x<1)\\ x+a+\dfrac{b}{x} & (x<-1)\end{cases}$$

이므로 $f(x)g(x)$가 연속함수이기 위해서는 $x=-1$과 $x=1$에서 연속이어야 한다.

그런데,

$$\lim_{x\to-1+0}f(x)g(x)=\lim_{x\to-1-0}f(x)g(x)$$
$$=-1+a-b=f(-1)g(-1)$$

이므로 $x=-1$에서 연속이다.

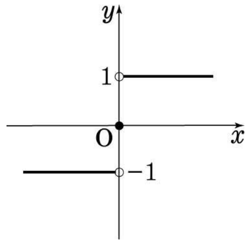
따라서 $x=1$에서 연속이기 위해서는

$$\lim_{x\to1+0}f(x)g(x)=\lim_{x\to1-0}f(x)g(x)=f(1)g(1)$$

∴ $1+a+b=-1-a-b=0$

∴ $a+b=-1$

(ⅱ) $h(x)=\begin{cases}1 & (x>0)\\ 0 & (x=0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$



$$f(x)h(x)=\begin{cases}x^2+ax+b & (x>0)\\ 0 & (x=0)\\ -x^2-ax-b & (x<0)\end{cases}$$

이므로 $f(x)h(x)$가 연속함수이기 위해서는

$$\lim_{x\to+0}f(x)h(x)=\lim_{x\to-0}f(x)h(x)=f(0)h(0)$$

∴ $b=-b=0$

∴ $b=0$

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의해 $a=-1,\ b=0$이므로

$f(x)=x^2-x$이다.

∴ $f(10)=10^2-10=90$

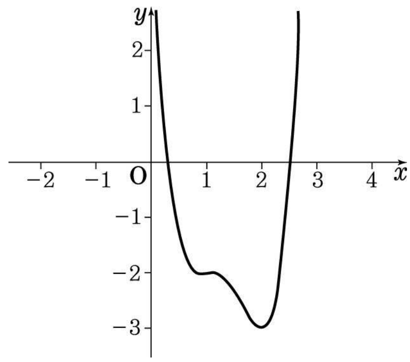
24. 다항함수의 미분법 정답 12

사차함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극값을 가지므로

$f'(x)=(ax^2+bx+c)(x-2)$

또 $y=|f(x)-f(1)|$이 오직 $x=a(a>2)$에서만 미분가능하지 않으므로 $y=|f(x)-f(1)|$는 $x=1$에서 미분가능하다.

⇔ $|f(x)-f(1)|$이 $x=1$에서 변곡점을 가진다.

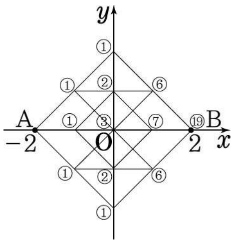


따라서 $f'(x)=a(x-1)^2(x-2)$가 되므로

$$\frac{f'(5)}{f'(3)}=\frac{4^2\times3a}{2^2a}=12$$

VisangEDU 비상에듀

25. 순열과 조합 정답 19



점 A(−2, 0)에서 점 B(2, 0)까지 4번만 '점프'해야 하므로 위의 그림에서 점 A를 출발하여 한 번 '점프'할 때마다 위의 선을 따라 x축의 양의 방향으로 한 칸씩 이동하여야 한다.(원 안의 숫자는 그 점까지 가는 방법의 수이다.)
따라서 구하는 경우의 수는 19이다.

미분과 적분

26. 삼각함수 정답 ⑤

$$\frac{\sin 50° + \sin 10°}{\cos 50° + \cos 10°} = \frac{2\sin 30° \cos 20°}{2\cos 30° \cos 20°}$$
$$= \frac{\sin 30°}{\cos 30°}$$
$$= \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

27. 함수의 극한 정답 ④

$$(\text{주어진 식}) = \lim_{x\to 0}\frac{e^{1-\tan x}(e^{\tan x - \sin x}-1)}{\tan x - \sin x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\left(e^{1-\tan x}\cdot\frac{e^{\tan x-\sin x}-1}{\tan x - \sin x}\right)$$
$$= e\cdot 1$$
$$= e$$

28. 삼각함수 정답 ⑤

두 점 P와 Q가 반지름이 1인 원 위를 $2t$, t만큼 움직이므로 두 점 P, Q의 좌표는 다음과 같다.
P$(\cos 2t,\ \sin 2t)$, Q$(\cos t,\ \sin t)$
이제 점 P에서 y축까지의 거리와 점 Q에서 x축까지의 거리가 같으므로
$|\cos 2t| = \sin t\ (0 \leq t \leq \pi)$

(ⅰ) $\cos 2t \geq 0$일 때,

즉 $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$, $\frac{3}{4}\pi \leq t \leq \pi$일 때

$\cos 2t = \sin t$

$2\sin^2 t + \sin t - 1$
$= (2\sin t - 1)(\sin t + 1) = 0$

$\therefore\ \sin t = \frac{1}{2}$ 또는 $\sin t = -1$

$\therefore\ t = \frac{\pi}{6}$ 또는 $t = \frac{5}{6}\pi$

(ⅱ) $\cos 2t < 0$일 때, 즉 $\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{3}{4}\pi$일 때

$-\cos 2t = \sin t$

$2\sin^2 t - \sin t - 1 = (2\sin t + 1)(\sin t - 1) = 0$

$\therefore\ \sin t = -\frac{1}{2}$ 또는 $\sin t = 1$

$\therefore\ t = \frac{\pi}{2}$

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의해 모든 t의 값의 합은

$\frac{\pi}{6} + \frac{5}{6}\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi$

29. 함수의 극한 정답 ③

ㄱ. (참) $f(x) = x^2$이면

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{f(x)}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\times x\right) = e^0 \times 0 = 0$$

ㄴ. (참) $\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{f(x)}$

$$= \lim_{x\to 0}\left\{\frac{3^x-1}{x}\times\frac{e^x-1}{f(x)}\times\frac{x}{e^x-1}\right\}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x}\times\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{f(x)}\times\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}$$
$$= \ln 3 \times 1 \times \frac{1}{1} = \ln 3$$

ㄷ. (거짓)

[반례] $f(x) = \sqrt{x}$라 하면 $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ 이지만

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{f(x)}-1}{x} = \left(\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}}\times\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \infty$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

30. 함수의 극한 정답 20

그림에서 변 AC의 중점을 D라 하면

$\angle ADO=90$ 이므로

$\overline{AC}=2\overline{AD}=2\overline{OA}\sin\frac{\theta}{2}=20\sin\frac{\theta}{2}$ …㉠

또 $\overline{OB}=\overline{OA}\sec\theta=10\sec\theta$이므로

$\overline{BC}=10\sec\theta-10$…㉡

또 $\overline{AB}=\overline{OA}\tan\theta=10\tan\theta$ …㉢

따라서 삼각형의 둘레의 길이는

$$f(\theta)=10(2\sin\frac{\theta}{2}+\sec\theta-1+\tan\theta)$$

$$f(0)=0,\ f'(\theta)=10(\cos\frac{\theta}{2}+\sec\theta\tan\theta+\sec^2\theta)$$

$$\therefore \lim_{x\to+0}\frac{f(\theta)}{\theta}=\lim_{x\to+0}\frac{f(\theta)-f(0)}{\theta}=f'(0)=20$$

확률과 통계

26. 자료의 정리와 요약 정답 ②

자료 A의 범위는 29-21 =8이므로

조건에 따라 자료 B의 범위도 8이다.

또 자료 B의 평균이 35이므로

$$\frac{34+35+38+36+m+n}{6}=35$$

$m+n=67$

만약 $n\geqq 38$이라면 $m\leqq 29$가 되어 자료 B의 범위는 9 이상이 되어 조건에 맞지 않는다.

그러므로 $n\leqq 37$이다.

따라서 자료 B의 범위가 8이 될 방법은

$38-m=8$, 즉 $m=30$일 때이다.

$\therefore\ n=37$

27. 확률 정답 ③

1부터 100까지의 자연수에서 서로 다른 3개를 선택하는 방법 중

17을 포함하도록 선택하는 방법의 수는 먼저 17을 뽑은 후 나머지 99개의 숫자 중 2개의 숫자를 선택하는 방법의 수와 같으므로

$$a={}_{99}C_2=\frac{99\times98}{2}\ (\text{가지})$$

17을 포함하지 않도록 선택하는 방법의 수는 17을 제외한 나머지 99개의 숫자 중 3개의 숫자를 선택하는 방법의 수와 같으므로

$$b={}_{99}C_3=\frac{99\times98\times97}{6}\ (\text{가지})$$

$$\therefore\ \frac{b}{a}=\frac{97}{3}$$

28. 확률 정답 ②

1단계 치료와 2단계 치료에 모두 성공한 환자가 완치된 것으로 판단되므로

1명의 환자가 완치된 것으로 판단될 확률은

$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ 이다.

따라서 4명의 환자 중 2명이 완치된 것으로 판단될 확률은 ${}_4C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8}{27}$ 이다.

29. 자료의 정리와 요약 정답 ⑤

ㄱ. (참) (A의 범위) $=70-15=55$

(B의 범위) $=105-50=55$

∴ (A의 범위) = (B의 범위)

ㄴ. (참) 자료 A의 중앙값이 40이므로 자료 A에서 값이 40 이하인 비율은 50% 이상이다.

ㄷ. (참) 자료 A에서 평균이 중앙값보다 크므로 평균 이상인 자료의 비율은 50% 이하이다.

또 자료 B에서 평균이 중앙값보다 작으므로 평균 이상인 자료의 비율을 50% 이상이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

30. 확률 정답 154

A와 B를 포함한 6명의 학생을 5인승, 7인승, 9인승 차에 1명, 2명, 3명을 배정하는 방법 중에서 A와 B를 같은 차에 배정하는 경우는 7인승 또는 9인승에 배정할 때이다.

6명의 회원을 1명, 2명, 3명씩 나누어 배정하는 모든 경우의 수는 ${}_6C_1\times{}_5C_2\times{}_3C_3=60$(가지)이다.

(i) 7인승 차에 A와 B를 배정하는 방법

나머지 4명의 회원을 5인승, 9인승 차에 배정하는 방법의 수이므로 ${}_4C_1\times{}_3C_3=4$(가지)이

다.

(ii) 9인승 차에 A와 B를 배정하는 방법

나머지 4명의 회원을 5인승, 7인승, 9인승에 각각 1명, 2명, 1명을 배정하면 되므로

$${}_4C_1 \times {}_3C_2 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!} \times 2! = 12(\text{가지})\text{이다.}$$

그러므로 A와 B가 같은 차에 배정될 방법의 수는 모두 16가지이다.

∴ (A와 B가 같은 차에 배정될 확률)

$$= \frac{16}{60} = \frac{4}{15} = \frac{q}{p}$$

따라서 $10p + q = 10 \times 15 + 4 = 154$ 이다.

이산수학

26. 그래프 　정답 ②

서로 다른 두 꼭짓점 사이에 항상 변이 하나 있는 그래프가 완전그래프이므로 꼭짓점의 개수가 10개인 완전그래프에서 변의 개수는

$${}_{10}C_2 = \frac{10 \times 9}{2} = 45(\text{가지})\text{이다.}$$

그런데 주어진 그래프에서 변의 개수가 15개이므로 완전그래프로 만들기 위하여 추가되어야 할 변의 개수는 $45 - 15 = 30$(가지)이다.

27. 선택과 배열 　정답 ⑤

두 문자 a, b를 중복을 허락하여 6자리 문자열을 만들 때 첫 문자는 a, a끼리는 이웃하지 않도록 나열하는 방법의 수는 사용되는 문자 a와 b의 개수에 따라 다음과 같이 구할 수 있다.

(i) a가 1개, b가 5개 사용되는 경우

$abbbbb$의 1가지가 가능하다.

(ii) a가 2개, b가 4개 사용되는 경우

$ababbb, abbabb, abbbab, abbbba$의 4가지가 가능하다.

(iii) a가 3개, b가 3개 사용되는 경우

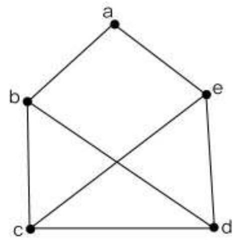
$ababab, ababba, abbaba$의 3가지가 가능하다.

(iv) a가 4개 이상일 때 a끼리 이웃하지 않게 문자열을 만들 수 없다.

이상에서 조건을 만족시키는 문자열의 개수는

$1 + 4 + 3 = 8$(가지)이다.

28. 그래프 　정답 ②



(i) a →□ →d →□→d인 경로의 수

a에서 d로 가는 변의 수가 2인 경우는 2가지이고, d에서 다시 d로 가는 변의 수가 2인 경우는 3가지이므로 구하는 경우의 수는 $2 \times 3 = 6$(가지)이다.

(ii) a →□ →a →□→d인 경로의 수

a에서 a로 가는 변의 수가 2인 경우는 2가지이고, a에서 d로 가는 변의 수가 2인 경우는 2가지이므로 구하는 경우의 수는 $2 \times 2 = 4$(가지)이다.

(iii) a →□ →c →□→d인 경로의 수

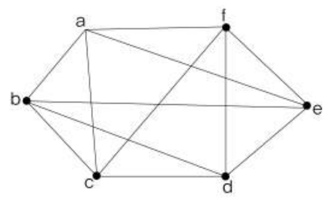
a에서 c로 가는 변의 수가 2인 경우는 2가지이고, c에서 d로 가는 변의 수가 2인 경우는 2가지이므로 구하는 경우의 수는 $2 \times 2 = 4$(가지)이다.

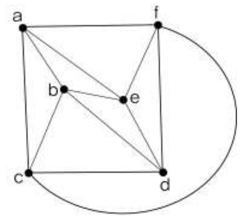
따라서 (i), (ii), (iii)에 의해 구하는 경로의 수는 $6 + 4 + 4 = 14$(가지)이다.

29. 그래프 　정답 ③

ㄱ. (참) 변이 꼭짓점에서만 만나게 평면 위에 다시 그릴 수 있는 그래프를 평면그래프라 한다.

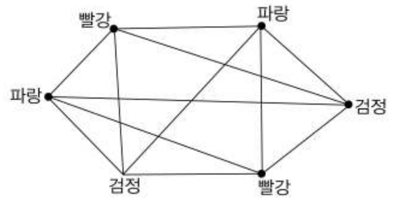
주어진 그래프를 다음 그림과 같이 평면 위에 다시 그릴 수 있으므로 주어진 그래프는 평면그래프이다.





ㄴ. (참) 모든 꼭짓점의 차수가 4로 짝수이므로 이 그래프는 오일러회로를 갖는다.

ㄷ. (거짓) 다음 그림과 같이 3가지 색으로 적절하게 색칠할 수 있으므로 꼭짓점을 적절하게 색칠하는데 필요한 최소 색의 수는 3이다.



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

30. 선택과 배열 **정답455**

선택하는 빨간색, 파란색, 노란색 색연필의 개수를 각각 x개, y개, z개라고 하면

$x \geq 1$, $y \geq 1$, $z \geq 1$이다.

이제 문제의 조건에 의하여 $3 \leq x+y+z \leq 15$이다.

$x+y+z=3$ 인 경우의 수는 1(가지)

$x+y+z=4$ 인 경우의 수는 ${}_3C_1$(가지)

$x+y+z=5$ 인 경우의 수는 ${}_4C_2$(가지)

$\vdots$

$x+y+z=15$ 인 경우의 수는 ${}_{14}C_2$(가지)

따라서 구하는 방법의 수는

$$1+{}_3C_2+{}_4C_2+{}_5C_2+\cdots+{}_{14}C_2$$
$$=({}_4C_3+{}_4C_2)+{}_5C_2+\cdots+{}_{14}C_2$$
$$=({}_5C_3+{}_5C_2)+\cdots+{}_{14}C_2$$
$$\vdots$$
$$={}_{14}C_3+{}_{14}C_2$$
$$={}_{15}C_3$$
$$=455$$

모의고사의 새로운 강자 비상에듀

전국모의고사 전문 VisangEDU 비상에듀

비상에듀만의 개인성적표 차별 POINT!

- 성적 진단 수능 예상 성적을 표준점수, 백분위, 등급, 예상석차로 제시
- 학습 설계 성적 향상을 위한 '학습 시간 배분 전략' 제시
- 약점 보완 개인별 약점 분석 자료 제시
- 지원 전략 목표 대학 진학 가능 진단 및 맞춤 대학 가이드

■ 2009년 하반기 모의고사 실시 일정

학 년	실 시 일
고3	8월 25일(화)/10월 27일(화)
고1,2	8월 28일(금)/10월 27일(화)/12월 23일(수)

☎ 문의 전화 02) 2028-0225

수리 영역_나형

1. ④	2. ⑤	3. ①	4. ②	5. ③
6. ④	7. ①	8. ①	9. ②	10. ③
11. ④	12. ②	13. ③	14. ⑤	15. ③
16. ①	17. ④	18. 65	19. 15	20. 21
21. 16	22. 5	23. 25	24. 10	25. 19
26. ②	27. ⑤	28. ③	29. ②	30. 4

1. 지수와 로그 정답 ④

$$2^{\log_2 4}\times 8^{\frac{2}{3}}=4^{\log_2 2}\times(2^3)^{\frac{2}{3}}$$
$$=4\times 2^2$$
$$=16$$

2. 행렬 정답 ⑤

$$A=2B+\begin{pmatrix}-7 & -2\\ 6 & 0\end{pmatrix}$$
$$=2\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-7 & -2\\ 6 & 0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -6 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-7 & -2\\ 6 & 0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-3 & -4\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$-3+(-4)+0+2=-5$ 이다.

3. 수열의 극한 정답 ①

분모, 분자를 n으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{9n^2+1}-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{\sqrt{9+\frac{1}{n^2}}-1}=1$$

4. 지수와 로그 정답 ②

$\dfrac{2^a+2^{-a}}{2^a-2^{-a}}=-2$ 에서 $\dfrac{2^{2a}+1}{2^{2a}-1}=-2$

$2^{2a}+1=-2(2^{2a}-1)$

$3\cdot 2^{2a}=1$

$\therefore\ 2^{2a}=4^a=\dfrac{1}{3}$

$\therefore\ 4^a+4^{-a}=\dfrac{1}{3}+3=\dfrac{10}{3}$

5. 수열의 극한 정답 ③

$20-\dfrac{1}{n}<a_n+b_n<20+\dfrac{1}{n}$ ………………… ㉠

$10-\dfrac{1}{n}<a_n-b_n<10+\dfrac{1}{n}$ ………………… ㉡

㉠−㉡을 하면

$10-\dfrac{2}{n}<2b_n<10+\dfrac{2}{n}$

$\therefore\ 5-\dfrac{1}{n}<b_n<5+\dfrac{1}{n}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(5-\dfrac{1}{n}\right)<\lim\limits_{n\to\infty}b_n<\lim\limits_{n\to\infty}\left(5+\dfrac{1}{n}\right)$에서 극한에 관한 기본 성질에 의하여

$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=5$

6. 행렬 정답 ④

$A^{-1}B^{-1}=(BA)^{-1}$에서

$BA=\begin{pmatrix}-1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ …………… ㉠

$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & -3\\ a & -1\end{pmatrix}$ 에서

$BA=\begin{pmatrix}2 & -3\\ a & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ a-1 & 2a-1\end{pmatrix}$ … ㉡

㉠과 ㉡은 같으므로

$b=1,\ a-1=0$

$\therefore\ a=1,\ b=1$

$\therefore\ a+b=2$

7. 수열의 극한 정답 ①

$a_n=\log\dfrac{n+1}{n}$ 이므로

$a_1+a_2+\cdots+a_n$

$=\log\dfrac{2}{1}+\log\dfrac{3}{2}+\cdots+\log\dfrac{n+1}{n}$

$=\log 2-\log 1+\log 3-\log 2+\cdots+\log(n+1)-\log n$

$=-\log 1+\log(n+1)$

$=\log(n+1)$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{n}{10^{a_1+a_2+\cdots+a_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{10^{\log(n+1)}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}$$
$$=1$$

8. 수열 정답 ①

$a_n=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$ 에서

$a_1=(-1)^{\frac{2}{2}}=-1$

$a_2=(-1)^{\frac{2(2+1)}{2}}=-1$

$a_3=(-1)^{\frac{3(3+1)}{2}}=1$

$a_4=(-1)^{\frac{4(4+1)}{2}}=1$

$a_5=(-1)^{\frac{5(5+1)}{2}}=-1$

$\vdots$

이므로 수열 $\{a_n\}$은 -1, -1, 1, 1이 반복적으로 나오는 수열이다.

$\therefore \sum_{n=1}^{2010} na_n$

$=(-1-2+3+4)+(-5-6+7+8)$
$+\cdots+(-2005-2006+2007+2008)$
$-2009-2010$

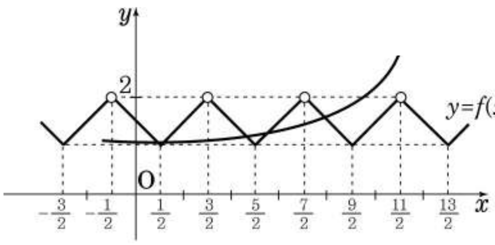
$=4+4+\cdots+4-2009-2010$

$=4\times 502-2009-2010$

$=-2011$

9. 지수함수와 로그함수 정답 ②

함수 $f(x)$는 주기가 2인 주기함수이므로 지수함수 $y=2^{\frac{x}{n}}$의 그래프와 함수 $y=f(x)$의 그래프의 교점의 개수가 5가 되려면 다음 그림과 같아야 한다.



$x=\frac{7}{2}$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 지수함수 $y=2^{\frac{x}{n}}$의 그래프보다 위에 있어야 하고, $x=\frac{11}{2}$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 지수함수 $y=2^{\frac{x}{n}}$의 그래프보다 아래에 있어야 하므로

(i) $2^{\frac{7}{2n}}<f\left(\frac{7}{2}\right)$

(ii) $f\left(\frac{11}{2}\right)<2^{\frac{11}{2n}}$

그런데, $\left(\frac{7}{2}\right)=f\left(\frac{11}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=2$이므로

$2^{\frac{7}{2n}}<2^1<2^{\frac{11}{2n}}$

$\therefore \frac{7}{2n}<1<\frac{11}{2n}$

$\therefore \frac{7}{2}<n<\frac{11}{2}$

$\therefore n=4,\ 5$

따라서 주어진 조건을 만족하는 모든 n의 값의 합은 9이다.

10. 지수와 로그 정답 ③

a, b가 100보다 작은 두 자연수이고, $a<b$이므로

(i) $1\leqq a<10$, $1\leqq b<10$일 때,

$\log a+\log b=1$
$\log ab=1$
$\therefore ab=10$
이때, 주어진 조건을 만족하는 순서쌍을 구하면 $(2, 5)$의 1개이다.

(ii) $1\leqq a<10$, $10\leqq b<100$일 때,

$\log a+\log b-1=1$
$\log ab=2$
$\therefore ab=100$
이때, 주어진 조건을 만족하는 순서쌍을 구하면 $(2, 50)$, $(4, 25)$, $(5, 20)$의 3개이다.

(iii) $10\leqq a<100$, $10\leqq b<100$일 때,

$\log a-1+\log b-1=1$
$\log ab=3$
$\therefore ab=1000$
이때, 주어진 조건을 만족하는 순서쌍을 구하면 $(20, 50)$, $(25, 40)$의 2개이다.

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 6(개)이다.

11. 지수와 로그 정답 ④

두 지점 A, B에서 측정한 수신 전력이 각각 -25, -5이므로 주어진 식에 대입하면

$-25=P-20\log\left(\frac{4\pi fR_A}{c}\right)$ …………… ㉠

$-5=P-20\log\left(\frac{4\pi fR_B}{c}\right)$ …………… ㉡

㉠−㉡을 하면

$$-20=-20\log\left(\frac{4\pi fR_A}{c}\right)+20\log\left(\frac{4\pi fR_B}{c}\right)$$

$$1=\log\left(\frac{4\pi fR_A}{c}\right)-\log\left(\frac{4\pi fR_B}{c}\right)$$

$$1=\log\left(\frac{\frac{4\pi fR_A}{c}}{\frac{4\pi fR_B}{c}}\right)$$

$$1=\log\frac{R_A}{R_B}$$

$$\therefore \frac{R_A}{R_B}=10$$

12. 수열의 극한 정답 ②

R_1에서 색칠된 부분의 넓이는 반지름의 길이가 $6\times\frac{1}{3}=2$인 원의 넓이에서 반지름의 길이가 1인 원의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$\pi\cdot 2^2-\pi\cdot 1^2=3\pi$

R_2에서 새로 색칠된 부분의 오른쪽 원에서 색칠된 부분은 반지름의 길이가 $2\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$인 원의 넓이에서 반지름의 길이가 $2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$인 원의 넓이를 뺀 것과 같고, 같은 모양이 왼쪽에도 있으므로

$$2\times\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^2\pi-\left(\frac{1}{3}\right)^2\pi\right\}=2\times\frac{3}{9}\pi=3\pi\left(\frac{2}{9}\right)$$

같은 방법으로 R_3에서 새로 색칠된 부분의 넓이를 구하면

$$4\times\left\{\left(\frac{2}{9}\right)^2\pi-\left(\frac{1}{9}\right)^2\pi\right\}=4\times\frac{3}{81}\pi=3\pi\left(\frac{2}{9}\right)^2$$

따라서 S_n의 넓이는 첫째항이 3π이고, 공비가 $\frac{2}{9}$인 무한등비수열의 합이므로

$$S_n=3\pi+3\pi\left(\frac{2}{9}\right)+3\pi\left(\frac{2}{9}\right)^2+\cdots$$

$$=\frac{3\pi}{1-\frac{2}{9}}$$

$$=\frac{27\pi}{7}$$

13. 수열의 극한 정답 ③

$a_na_{n+1}=\left(\frac{1}{5}\right)^n$이고, $a_1=1$이므로

$a_1a_2=\frac{1}{5}$ $\quad\therefore a_2=\frac{1}{5}$

$a_2a_3=\left(\frac{1}{5}\right)^2$ $\quad\therefore a_3=\frac{1}{5}$

$a_3a_4=\left(\frac{1}{5}\right)^3$ $\quad\therefore a_4=\left(\frac{1}{5}\right)^2$

$a_4a_5=\left(\frac{1}{5}\right)^4$ $\quad\therefore a_5=\left(\frac{1}{5}\right)^2$

$\vdots$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^3+\cdots$$

$$=\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{1}{4}$$

14. 행렬 정답 ⑤

ㄱ. (참) $P=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$이므로

$$PPP=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$\therefore P\in S$

ㄴ. (참) $PAP=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=A$,

$PBP=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=B$이므로

$$AB=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}AB\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$\therefore AB\in S$

ㄷ. (참) $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$라 두면 $A\in S$이므로

$$PAP=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}c&d\\a&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A$$

$\therefore\ a = d,\ b = c$

$\therefore\ A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$

또, $O = A^2$이므로

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2+b^2 \end{pmatrix}$$

$\therefore\ a^2+b^2=0,\ 2ab=0$

$\therefore\ a=b=0$

그러므로 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

15. 순열과 조합 **정답 ③**

등식 $(1+x)^{2n-1} = (1+x)^{n-1}(1+x)^n$의 좌변에서 x^{n-1}의 계수는 $\boxed{{}_{2n-1}\mathrm{C}_{n-1}}$이고, (*)을 이용하여 우변에서 x^{n-1}의 계수를 구하면

$$\sum_{k=1}^{n}\left({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} \times \boxed{{}_{n}\mathrm{C}_{n-k}}\right)$$

이다. 따라서

$$\boxed{{}_{2n-1}\mathrm{C}_{n-1}} = \sum_{k=1}^{n}\left({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} \times \boxed{{}_{n}\mathrm{C}_{n-k}}\right)$$

이다.

한편 $1 \leq k \leq n$일 때,

$k \times {}_{n}\mathrm{C}_{k} = n \times {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$이므로

$$\sum_{k=1}^{n} k({}_{n}\mathrm{C}_{k})^2 = \sum_{k=1}^{n}(n \times {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} \times {}_{n}\mathrm{C}_{k})$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(n \times {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} \times \boxed{{}_{n}\mathrm{C}_{n-k}}\right)$$

$$= n \times \sum_{k=1}^{n}\left({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} \times \boxed{{}_{n}\mathrm{C}_{n-k}}\right)$$

$$= n \times {}_{2n-1}\mathrm{C}_{n-1}$$

$$= n \times \frac{(2n-1)!}{(n-1)!\,n!}$$

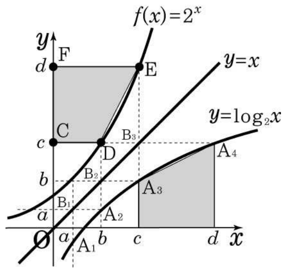
$$= n \times \frac{2n \cdot (2n-1)!}{2n \cdot (n-1)!\,n!}$$

$$= \frac{n}{2} \times \frac{(2n)!}{n!\,n!}$$

$$= \boxed{\frac{n}{2} \times {}_{2n}\mathrm{C}_{n}}$$

16. 지수함수와 로그함수 **정답 ①**

함수 $f(x) = 2^x$은 함수 $y = \log_2 x$의 역함수이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y = x$에 대하여 대칭이다. 오른쪽 그래프에서 주어진 사각형의 넓이는 □CDEF의 넓이와 같다.



$\therefore$ □CDEF

$$= \frac{1}{2}(\overline{\mathrm{CD}}+\overline{\mathrm{EF}}) \times \overline{\mathrm{CF}}$$

$$= \frac{1}{2}(b+c)(d-c)$$

$$= \frac{1}{2}\{f(a)+f(b)\}\{f(c)-f(b)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{f(a)+f(b)\}\{(f \circ f)(b)-(f \circ f)(a)\}$$

17. 행렬 **정답 ④**

ㄱ. (거짓)

[반례] $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$이므로

홀수인 성분이 있다.

ㄴ. (참)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$= \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$이므로

$$3\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & 9 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}$$

즉, $A_1 + A_2 + \cdots + A_m = \begin{pmatrix} 9 & 9 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}$를 만족하는 m의 값은 12이다.

ㄷ. (참)

행렬 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$의 모든 성분이 홀수이므로

$A_1 + A_2 + \cdots + A_n$의 모든 성분도 홀수이어야 한다.

이때, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$이므로 n의 최솟값은 4이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

18. 지수함수와 로그함수 정답 65

$9^x-3^{x+2}+8=0$에서

$3^{2x}-9\cdot 3^x+8=0$

$(3^x-1)(3^x-8)=0$

$\therefore\ 3^x=1$ 또는 $3^x=8$

두 근이 α, β이므로 $3^\alpha=1$, $3^\beta=8$로 놓을 수 있다.

$\therefore\ 3^{2\alpha}+3^{2\beta}=(3^\alpha)^2+(3^\beta)^2=1^2+8^2=65$

19. 수열 정답 15

네 수 1, x, y, z가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2x=1+y$

$\therefore\ y=2x-1$ …… ㉠

또, $2y=x+z$

$\therefore\ z=2y-x$

$=2(2x-1)-x$

$=3x-2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 $6x+z=5y$에 대입하면

$6x+(3x-2)=5(2x-1)$

$\therefore\ x=3$

$x=3$을 ㉠, ㉡에 각각 대입하면 $y=5$, $z=7$

$\therefore\ x+y+z=3+5+7=15$

20. 행렬 정답 21

주어진 방정식 $\begin{pmatrix}1 & a-2\\ 2a & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\ 6\end{pmatrix}$의 해가 무수히 많으면 행렬 $\begin{pmatrix}1 & a-2\\ 2a & -2\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않아야 하므로

$1\cdot(-2)-(a-2)\cdot 2a=0$

$-2-2a^2+4a=0$

$a^2-2a+1=0$

$(a-1)^2=0$

$\therefore\ a=1$

$a=1$을 주어진 방정식에 대입하면

$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\ b\end{pmatrix}$

이때, 해가 무수히 많으려면 $\dfrac{1}{2}=\dfrac{-1}{-2}=\dfrac{10}{b}$을 만족해야 하므로 $b=20$

$\therefore\ a+b=1+20=21$

21. 지수함수와 로그함수 정답 16

$1+\log_{\frac{1}{2}}x^2>\log_{\frac{1}{2}}(5x-8)$에서

$\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{2}+\log_{\frac{1}{2}}x^2>\log_{\frac{1}{2}}(5x-8)$

$\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{2}x^2>\log_{\frac{1}{2}}(5x-8)$

$\dfrac{1}{2}x^2>5x-8$

$x^2-10x+16<0$

$(x-2)(x-8)<0$

$\therefore\ 2<x<8$

따라서 $\alpha=2$, $\beta=8$이므로 $\alpha\beta=2\cdot 8=16$이다.

참고 진수조건에서 $x^2\neq 0$, $5x-8>0$ $\therefore\ x>\dfrac{8}{5}$

22. 수열 정답 5

$a_m+a_{m+1}+\cdots+a_{15}<0$에서

$f(15)=a_1+a_2+\cdots+a_{15}$,

$f(m-1)=a_1+a_2+\cdots+a_{m-1}$

이므로 $f(15)-f(m-1)<0$

$\therefore\ f(15)<f(m-1)$

그림에서 $3<m-1<15$이므로

$4<m<15$($\because$ m이 15보다 작은 자연수)

따라서 구하는 m의 최솟값은 5이다.

23. 순열과 조합 정답 25

$\sum_{k=1}^{n} {}_nC_k={}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n$

$=2^n-1$

(ⅰ) n이 짝수일 때,

$n=2a$(a는 자연수)로 놓으면

$2^n-1=2^{2a}-1=(2^a-1)(2^a+1)$

이때, 2^a은 3의 배수가 아니므로 앞뒤의 수인 2^a-1, 2^a+1의 둘 중 하나는 3의 배수이다.

따라서 2^n-1은 3의 배수이다.

(ii) n이 홀수일 때,

$$2^n-1=1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}$$
$$=(1+2)+(2^2+2^3)+$$
$$\cdots+(2^{n-3}+2^{n-2})+2^{n-1}$$

이때, $1+2=3$, $2^2+2^3=3\cdot2^2$, $\cdots$,

$2^{n-3}+2^{n-2}=3\cdot2^{n-3}$은

3의 배수이고 2^{n-1}은 3의 배수가 아니다.

따라서 2^n-1은 3의 배수이다.

따라서 (i), (ii)에 의하여 n은 2, 4, 6, 8, $\cdots$, 50의 25개이다.

24. 지수와 로그 정답 10

자연수 n에 대하여 $\log n$의 지표가 $f(n)$, 지수가 $g(n)$이므로 $\log n=f(n)+g(n)$이고,

$\log n\geq0$이므로 $f(n)\geq0$, $0\leq g(n)<1$이다.

$f(n)-g(n)$의 값이 최소일 때, $f(n)$의 값은 0이고 $g(n)$의 값은 가장 커야 한다.

이를 만족하는 $\log n$의 값은 $\log 9$이므로

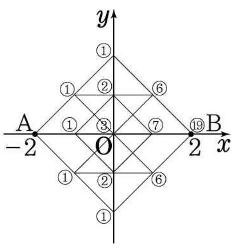
$f(n)=0$, $g(n)=\log 9$

따라서 최솟값은 $-\log 9=\log 9^{-1}=\log\frac{1}{9}$

$\therefore\ a=9,\ b=1$

$\therefore\ a+b=9+1=10$

25. 순열과 조합 정답 19



점 $A(-2,\ 0)$에서 점 $B(2,\ 0)$까지 4번만 '점프'해야 하므로 위의 그림에서 점 A를 출발하여 한 번 '점프'할 때마다 위의 선을 따라 x축의 양의 방향으로 한 칸씩 이동하여야 한다.(원 안의 숫자는 그 점까지 가는 방법의 수이다.)

따라서 구하는 경우의 수는 19이다.

26. 수열 정답 ②

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2=6$에서 $ar=6$ ········· ㉠

$a_5=162$에서 $ar^4=162$ ······ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3=27$

$\therefore\ r=3,\ a=2$

즉, $a_n=2\cdot3^{n-1}$이므로

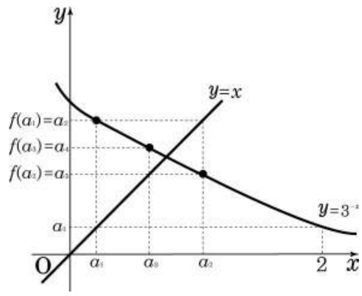
$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(2\cdot3^{k-1})$$
$$=2\cdot\frac{1\cdot(3^n-1)}{3-1}$$
$$=3^n-1$$

$n=6$일 때, $3^6-1=728$

$n=7$일 때, $3^7-1=2186$

따라서 $\sum_{k=1}^{n}a_k\geq1000$을 만족시키는 n의 최솟값은 7이다.

27. 지수함수와 로그함수 정답 ⑤



위의 그림에서 $a_3<a_4<a_2$

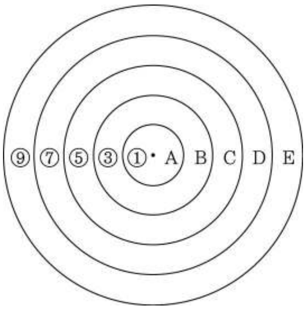
28. 수열의 극한 정답 ③

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n a_n}{3^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{5}{3}\right)^n a_n}{1+\frac{1}{3^n}}$$

이 0이 아닌 상수이므로 $a_n=\left(\frac{3}{5}\right)^n\cdot k$ (k는 상수)로 놓을 수 있다.

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n\cdot k}{\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}\cdot k}$$
$$=\frac{1}{\frac{3}{5}}$$
$$=\frac{5}{3}$$

29. 순열과 조합 정답 ②



A, B, C, D, E의 영역의 넓이는 각각

1^2, 2^2-1, 3^2-2^2, 4^2-3^2, 5^2-4^2,

즉 1, 3, 5, 7, 9이다.

E, D, C, B, A순으로 색을 칠한다고 하면 E에 칠할 수 있는 색은 3가지,

D에 칠할 수 있는 색은 E에 칠한 색을 제외한 2가지,

C에 칠할 수 있는 색은 E, D에 칠한 색을 제외한 1가지,

B에 칠할 수 있는 색은 E, C에 칠한 색을 제외한 1가지,

A에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 2가지이다.

따라서 서로 다르게 색칠된 문양의 개수는

$3\times2\times1\times1\times2=12$(개)

30. 수열 정답 4

A, S, r의 값의 변화를 조사하면 다음 표와 같다.

r	0	0	1	0	1	1	1
A	58	29	14	7	3	1	0
S	0	0	1	1	2	3	4

따라서 인쇄되는 S의 값은 4이다.

모의고사의 새로운 강자 비상에듀
전국모의고사 전문 VisangEDU 비상에듀
비상에듀만의 개인성적표 차별 POINT!
성적 진단 수능 예상 성적을 표준점수, 백분위, 등급, 예상석차로 제시
학습 설계 성적 향상을 위한 '학습 시간 배분 전략' 제시
약점 보완 개인별 약점 분석 자료 제시
지원 전략 목표 대학 진학 가능 진단 및 맞춤 대학 가이드
■ 2009년 하반기 모의고사 실시 일정

학 년	실 시 일
고3	8월 25일(화)/10월 27일(화)
고1,2	8월 28일(금)/10월 27일(화)/12월 23일(수)

☎ 문의 전화 02) 2028-0225